



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Martina Lovrenić-Jugović

**NUMERIČKO I EKSPERIMENTALNO
MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA
KORTIKALNOGA KOŠTANOGA TKIVA**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2012



UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Martina Lovrenić-Jugović

**NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELLING
CORTICAL BONE TISSUE DEFORMATION
PROCESSES**

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2012



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Martina Lovrenić-Jugović

**NUMERIČKO I EKSPERIMENTALNO
MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA
KORTIKALNOGA KOŠTANOGA TKIVA**

DOKTORSKI RAD

Mentor:
dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor

Zagreb, 2012



UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Martina Lovrenić-Jugović

**NUMERICAL AND EXPERIMENTAL MODELLING
CORTICAL BONE TISSUE DEFORMATION
PROCESSES**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Dr. sc. Zdenko Tonković, professor

Zagreb, 2012

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 539.376 : 611.718

Ključne riječi:

kortikalno koštano tkivo, puzanje – rasterećenje, viskoelastičnost, oštećenje, viskoplastičnost, eksperiment, metoda konačnih elemenata

Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI

Znanstveno polje: STROJARSTVO

Institucija u kojoj je rad izrađen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

Mentor rada: dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor

Broj stranica: 177

Broj slika: 80

Broj tablica: 7

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 110

Datum obrane: 7. svibnja 2012.

Povjerenstvo:

dr. sc. Jurica Sorić, redoviti profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Janoš Kodvanj, izvanredni profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Tomislav Filetin, redoviti profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Slavko Davila, izvanredni profesor, Medicinski fakultet, Zagreb

Institucija u kojoj je rad pohranjen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

ZAHVALA

Kao prvo veliko hvala upućeno je mom mentoru, prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću, koji mi je svojim idejama, savjetima te stručnim i nesebičnim vodstvom pomogao oko izrade ove disertacije.

Zahvaljujem članovima povjerenstva prof. dr. sc. Jurici Soriću, prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću, izv. prof. dr. sc. Janošu Kodvanju, prof. dr. sc. Tomislavu Filetinu te izv.prof. dr. sc. Slavku Davili, na pažljivom čitanju rada i primjedbama koje su poboljšale njegovu kvalitetu.

Posebna zahvalnost ide svim djelatnicima Laboratorija za numeričku mehaniku, prof. dr. sc. Ivi Alfireviću, prof. dr. sc. Jurici Soriću, doc. dr. sc. Igoru Karšaju, dr. sc. Tomislavu Jarku, dr. sc. Ivici Skozritu, Eduardu Mareniću, dipl. ing. stroj., Tomislavu Lesičaru, mag. ing. stroj. i Borisu Jalušiću, mag. ing. stroj. za njihovu podršku da se ovaj rad realizira. Istaknula bi kolegu dr. sc. Ivicu Skozrita koji mi je u mojim prvim koracima programiranja svojim iskustvom puno pomogao.

Djelatnicima Laboratorija za eksperimentalnu mehaniku prof. dr. sc. Janošu Kodvanju, Zvonimiru Tomičeviću, mag. ing. stroj., a pogotovo bivšem djelatniku dr. sc. Anti Bakiću, laborantu Gordanu Plačku te Martinu Surjaku, mag. ing. stroj. veliko hvala oko provedbe svih zahtjevnih eksperimentalnih istraživanja.

Zahvaljujem se svim kolegama sa Zavoda za tehničku mehaniku, pogotovo iz razloga što su me oslobodili svih nastavnih ovosemestralnih obaveza. Hvala prof. dr. sc. Draganu Pustaicu na dugogodišnjoj stručnoj suradnji, pruženoj pomoći i znanju.

Svim članovima Laboratorija za ispitivanje mehaničkih svojstava, a pogotovo njegovom voditelju izv. prof. dr. sc. Željku Alaru, veliko hvala na određivanju mjerne nesigurnosti u ovom radu korištenih mjernih uređaja.

Također se zahvaljujem prijateljici dr. sc. Ani Sušac koja mi je svojim pristupom bazama podataka omogućila prikupljanje velike količine literature važnog dijela za izradu ovog rada.

Zahvaljujem se firmi "PROMES-CVANCIGER" na donaciji goveđeg koštanog tkiva. Također hvala firmi "KAPRI d.o.o." na besplatnim uslugama rezanja vodenim mlazom.

Na kraju bi se zahvalila svojoj obitelji, majci na njezinoj dugogodišnjoj bezrezervnoj podršci, suprugu Zdenku koji je cijelo vrijeme bio uz mene i poticao me da ustrajem te mojim prekrasnim curicama Klari i Tei koje su svojom toplinom uljepšavale svaki moj dan.

SADRŽAJ

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU	VII
ZAHVALA.....	IX
SADRŽAJ	XI
PREDGOVOR	XIII
SAŽETAK.....	XVII
SUMMARY	XIX
KLJUČNE RIJEČI / KEYWORDS	XXI
POPIS KRATICA	XXIII
POPIS OZNAKA	XXV
POPIS SLIKA	XXIX
POPIS TABLICA.....	XXXV
1. UVOD	1
1.1. Općenito o koštanom tkivu	1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja	2
1.3. Motivacija.....	8
1.4. Hipoteza rada.....	9
1.5. Opis istraživanja	10
2. STRUKTURA I MEHANIČKE KARAKTERISTIKE KOŠTANOGA TKIVA.....	13
2.1. Struktura koštanoga tkiva.....	13
2.1.1. Makrostruktura	14
2.1.2. Mikrostruktura kortikalnoga koštanoga tkiva	15
2.2. Koštana pregradnja.....	17
2.3. Mehaničke karakteristike kortikalnoga koštanoga tkiva	19
2.4. Mehanički i biološki faktori pri eksperimentalnom istraživanju	23
2.5. Konstitutivni model koštanoga tkiva.....	24
3. PREGLED MATERIJALNIH MODELA	25
3.1. Model oštećenja.....	28
3.2. Model oštećenja pri puzanju	31
3.3. Model viskoelastičnosti.....	32
3.4. Model viskoplastičnosti.....	33
4. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODEL	35
4.1. Osnove klasične termodinamike	37
4.1.1. Prvi zakon termodinamike	37
4.1.2. Drugi zakon termodinamike.....	38
4.1.3. Clausius Duhemova nejednadžba.....	39

4.2. Termodinamika nepovrativog procesa	40
4.3. Osnovna termodinamička razmatranja.....	41
4.4. Viskoelastičnost spregnuta s oštećenjem	42
4.4.1. Trodimenzijski model	43
4.4.2. Jednodimenzijski model	45
4.5. O konstitutivnom modelu	45
5. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE	49
5.1. Eksperimenti na kompozitnom materijalu	51
5.2. Eksperimenti na goveđem kortikalnom koštanom tkivu.....	54
5.2.1. Postupak obrade epruveta iz goveđega kortikalnoga koštanoga tkiva	56
5.2.2. Provedba mehaničkih ispitivanja	60
5.2.3. Rezultati ispitivanja.....	62
5.3. Eksperiment na ljudskom kortikalnom koštanom tkivu iz literature	66
6. ODREĐIVANJE PARAMETARA MATERIJALA	69
6.1. Parametri kompozitnoga materijala	71
6.2. Parametri goveđega kortikalnoga koštanoga tkiva.....	79
6.3. Parametri ljudskoga kortikalnoga koštanoga tkiva	86
7. NUMERIČKA FORMULACIJA I IMPLEMENTACIJA.....	91
7.1. Jednodimenzijska formulacija.....	92
7.2. Trodimenzijska formulacija	101
8. USPOREDBA NUMERIČKIH I EKSPERIMENTALNIH REZULTATA.....	113
8.1. Kompozitni materijal.....	115
8.2. Goveđe kortikalno koštano tkivo	117
8.3. Ljudsko kortikalno koštano tkivo.....	118
8.4. Usporedba jednoosne i troosne analize za goveđe kortikalno koštano tkivo	121
9. ZAKLJUČAK	123
9.1. Rasprava	126
9.2. Znanstveni doprinos	128
9.3. Buduća istraživanja	129
LITERATURA.....	131
ŽIVOTOPIS	139
CURRICULUM VITAE	141

PREDGOVOR

Numerički algoritmi za analizu oštećenja u inženjerskim materijalima u novijoj literaturi primjenjuju se za modeliranje bioloških tkiva. Osnovni problem pri tome je formuliranje konstitutivnih modela koji su za biološka tkiva mnogo složeniji. Biološki utjecaji i sposobnost koštane pregradnje (*bone remodelling*) samo su neke od bitnih razlika u ponašanju bioloških tkiva u odnosu na inženjerske materijale. Osnovna mehanička svojstva koštanog tkiva su anizotropnost, heterogenost i viskozno ponašanje, a svakodnevnom aktivnošću u kosti nastaju mikrooštećenja koja u kontinuiranom procesu pregradnje iščezavaju. Preopterećenje u koštanom tkivu uzrokuje akumuliranje oštećenja, što je posljednjih godina zaokupilo pažnju velikog broja istraživača. Jedan od razloga je što akumuliranje oštećenja inicira koštanu pregradnju. Međutim ako akumuliranje oštećenja postaje brže od pregradnje može doći do loma kosti. Koštana pregradnja regulirana je mineralnim metabolizmom i pojavom mikropukotina. Akumuliranjem oštećenja dolazi do značajne degradacije mehaničkih svojstava kao što su krutost, čvrstoća i žilavost koštanog tkiva.

Modeliranje akumuliranja oštećenja i pregradnje koštanog tkiva pod utjecajem različitih opterećenja je vrlo važno u medicinskim istraživanjima za analizu ponašanja kosti u spoju s umjetnim fiksatorima ili protezama. To predstavlja važan alat za projektiranje implantata. Osim toga, modeliranje brzine procesa akumuliranja oštećenja i pregradnje pridonosi analizi loma kosti. Kako u inženjerstvu, tako i u biomehanici numeričke simulacije sve više zamjenjuju mnogo skuplji eksperiment. Pritom značajan utjecaj na točnost numeričkog postupka ima opisivanje materijalnog modela koji se definira konstitutivnim jednadžbama na razini točke integracije konačnog elementa. Zbog nedovoljnog poznavanja temeljnog mehanizma oštećenja, odgovarajuće konstitutivne relacije koje sprežu akumuliranje oštećenja u koštanom tkivu s viskoznim efektima još uvijek nisu dovoljno točno definirane.

Glavna namjera istraživanja u okviru ovog rada bila je primjenom formulacija sličnih onima za inženjerske materijale izvesti konstitutivni model i pripadni numerički algoritam za modeliranje akumuliranja oštećenja u kortikalnom koštanom tkivu koji će omogućiti sprežanje mehanizma oštećenja s efektima ortotropije, viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Osim u biomehanici, konstitutivni modeli i pripadni numerički algoritmi koji opisuju viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala te akumuliranje oštećenja, nalaze svoju primjenu i kod polimernih i kompozitnih materijala. Iz tog razloga je u radu najprije eksperimentalno istražen kompozitni materijal, epoksidna smola ojačana s kratkim staklenim

vlaknima, za koju se utvrdilo da ima slično mehaničko ponašanje kao ljudska kortikalna kost. Razlog tome je što se za slučaj istraživanja ponašanja kortikalnog koštanog tkiva očekivalo „rasipanje“ rezultata, dok su rezultati eksperimenata na kompozitnom materijalu omogućili bolju procjenu parametara materijala i ocjenu opravdanosti primjene predloženog konstitutivnog modela.

Istraživanja provedena u radu temelje se na eksperimentalnim ispitivanjima i numeričkom modeliranju nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja navedenog kompozitnog materijala i goveđeg kortikalnog koštanog tkiva za slučaj vremenski promjenjivog opterećenja koje uključuje puzanje s naknadnim rasterećivanjem materijala. Eksperimenti su provedeni u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku, a numeričko modeliranje u Laboratoriju za numeričku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje (FSB), Sveučilišta u Zagrebu.

Za potrebe eksperimentalnih istraživanja tvrtka SAWBONES (Sawbones Europe AB in Malmö, Sweden) izradila je epruvete od kompozitnog materijala, dok se goveđe kortikalno koštano tkivo nabavilo iz klaonice "PROMES-CVANCIGER" u Sisku. Koštano tkivo obrađeno je rezanjem vodenim mlazom u firmi "KAPRI d.o.o." iz Zagreba, a sve ostale obrade odrađene su u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku. Eksperimenti na epruvetama iz kompozitnog materijala te goveđeg kortikalnog koštanog tkiva provedeni su na kvazistatičkoj kidalici (MESSPHYSIK BETA 50-5) pri sobnoj temperaturi. Rezultati dobiveni primjenom navedene kidalice kontrolirani su na nekoliko epruveta s rezultatima dobivenim na kidalici Shimadzu AG-X koja je instalirana u Laboratoriju za ispitivanje materijala na Veleučilištu u Karlovcu. Epruvete goveđega kortikalnoga tkiva uzete su u uzdužnom (longitudinalnom) i poprečnom (transverzalnom) smjeru s obzirom na anatomske osi kosti. Na epruvetama uzetim u uzdužnom smjeru kosti provedeni su vlačna i tlačna ciklička ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Osim toga, na epruvetama uzetim u poprečnom smjeru kosti napravljena su vlačna ciklička ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem, jednako kao i na navedenom kompozitnom materijalu. Nadalje, eksperimenti puzanja do loma epruvete provedeni su na kompozitnim epruvetama i epruvetama iz goveđeg koštanog tkiva koje su bile uzete u uzdužnom smjeru kosti.

Nakon obrađenih eksperimentalnih rezultata pristupilo se analizi i definiranju konstitutivnog modela te određivanju parametara materijala u konstitutivnim relacijama. Nakon toga je predložen jednodimenzijski konstitutivni model koji spreže viskoelastičnost s mehanizmom akumuliranja oštećenja i viskoplastičnih deformacija.

U okviru numeričkog modeliranja, za rješavanje konstitutivnih jednadžbi na razini materijalne točke izveden je numerički algoritam za jednodimenzijsku formulaciju predloženog konstitutivnog modela koji je implementiran u formulaciju konačnih elemenata softverskog paketa ABAQUS primjenom korisničke rutine UMAT. Za modeliranje nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja materijala primijenjen je Newton-Rapsonov iterativni princip, a za bržu konvergenciju globalnog iteracijskog algoritma izveden je konzistentni operator. Zatim je izvedena trodimenzijska numerička formulacija modela viskoelastičnosti spregnute s oštećenjem uz pretpostavku ortotropnog ponašanja materijala i ortotropne raspodjele oštećenja. Algoritam je također implementiran u program ABAQUS primjenom korisničke rutine UMAT.

Na kraju su uspoređeni eksperimentalni i numerički rezultati. S predloženim konstitutivnim modelom analizirani su i eksperimentalni rezultati pronađeni u druga dva literaturna izvora. Također je dana usporedba rezultata jednodimenzijske i trodimenzijske numeričke formulacije.

Tekst rada organiziran je u devet poglavlja:

- Poglavlje 1 pored uvodnog opisa sadržaja istraživanja daje pregled dosadašnjih istraživanja u području kortikalnoga koštanoga tkiva s posebnim osvrtom na viskoelastično ponašanje, eksperimente puzanja te akumuliranje oštećenja. Također su navedeni radovi koji numeričkim formulacijama opisuju akumuliranje oštećenja s kratkim komentarima njihovih doprinosa, ali i nedostataka. Upravo su nedostaci dosadašnjih istraživanja bili poticaj izradi ovog rada. U ovom poglavlju se ističe i motivacija disertacije, nakon čega se postavlja hipoteza rada te daje kratak pregled provedenih istraživanja.
- Poglavlje 2 daje detaljniji opis kortikalnoga koštanoga tkiva koji počinje s opisom hijerarhijske strukture koštanog tkiva idući od makro razine do pod-nano razine. Detaljnije je opisana makrostruktura, te mikrostruktura kortikalnog koštanog tkiva. Opisan je i proces koštane pregradnje, nakon čega su opisana mehanička svojstva kortikalnoga koštanoga tkiva.
- Poglavlje 3 definira teorijsku pozadinu ove disertacije, gdje su razmatrani pojedini mehanički modeli ponašanja kortikalnoga koštanoga tkiva kao što je model oštećenja, model oštećenja pri puzanju, model viskoelastičnosti te model viskoplastičnosti.

- U poglavlju 4 dan je prikaz korištenog konstitutivnog modela koji aditivno spaja model viskoelastičnosti i oštećenja s modelom viskoplastičnosti, a zasniva se na relacijama mehanike oštećenja i termodinamike kontinuuma. Na kraju poglavlja prikazan je rezime korištenog konstitutivnog modela.
- U poglavlju 5 su opisana eksperimentalna istraživanja koja su provedena u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku FSBa, najprije na kompozitnom materijalu (epoksidna smola ojačana kratkim staklenim vlaknima), a zatim na kortikalnom goveđem koštano tkivu. Dan je prikaz provedenih vlačnih ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem te ispitivanja vlačnog puzanja do loma za kompozitni materijal i za goveđe kortikalno koštano tkivo. Osim toga, dani su rezultati tlačnog ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem za goveđe kortikalno koštano tkivo. Također su prikazani rezultati eksperimenata iz literature na temelju kojih su određeni parametri materijala za u ovom radu predloženi materijalni model.
- U poglavlju 6 dan je opis postupka određivanja parametara konstitutivnog modela. Nakon toga, prikazani su rezultati određivanja parametara modela za analizirani kompozitni materijal, zatim za goveđe kortikalno koštano tkivo te na kraju za ljudsko koštano tkivo. U nastavku je dana usporedba eksperimentalnih rezultata i rezultata matematičkog modela za ovisnost deformacije o vremenu za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem za različite iznose opterećenja.
- U poglavlju 7 dan je prikaz jednodimenzijske numeričke formulacije koja spreže modele viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja na razini materijalne točke. Nadalje je dan prikaz trodimenzijske formulaciju te opis postupka implementacije u korisničku rutinu UMAT te njeno povezivanje s programskim paketom ABAQUS.
- Rezultati numeričke analize prikazani u poglavlju 8 podijeljeni su u tri cjeline. U prvoj cjelini su prikazani rezultati za kompozitni materijal, u drugoj za goveđe kortikalno koštano tkivo, a u trećoj za ljudsko kortikalno koštano tkivo. Četvrta cjelina je usporedba rezultata dobivenih primjenom jednodimenzijske i trodimenzijske numeričke formulacije.
- U poglavlju 9 dani su zaključci rada i sažeti prikaz glavnih znanstvenih doprinosa. Ovdje su također navedena i osnovna ograničenja razvijenog numeričkog algoritma te su dane smjernice za njegov daljnji razvoj i moguća poboljšanja.

SAŽETAK

Osnovna mehanička svojstva koštanog tkiva su anizotropnost, heterogenost i viskoznost, a svakodnevnom aktivnošću u kosti nastaju mikrooštećenja koja u kontinuiranom procesu pregradnje iščezavaju. Pretpostavka je da do akumuliranja oštećenja u kosti dolazi zbog toga što s cikličkim opterećenjima stvaranje oštećenja postaje brže od pregradnje što može dovesti i do njenog loma. Zbog svoje vrlo složene strukture još nije predložen dovoljno točan konstitutivni model za opisivanje nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja kortikalnog koštanog tkiva.

U okviru eksperimentalnih istraživanja u radu je najprije istražen proces deformiranja kompozitnog materijala koji ima slično mehaničko ponašanje kao ljudska kortikalna kost. To je omogućilo efikasnije i točnije definiranje konstitutivnog modela, koji je osim na analizirani kompozitni materijal primjenjiv i na goveđe i ljudsko kortikalno koštano tkivo. Razlog tome je što je kod eksperimentalnog istraživanja goveđeg kortikalnog koštanog tkiva bilo većih „rasipanja“ rezultata u odnosu na kompozitni materijal, što je otežalo procjenu parametara materijala. Osim za slučaj vlačnog puzanja, prikazano je ponašanje kosti za slučaj cikličkog tlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Za isti način opterećivanja istraženo je ponašanje epruveta uzetih u poprečnom smjeru kosti, što u literaturi nije dovoljno istraženo. Na taj način provedena eksperimentalna istraživanja omogućuju bolje razumijevanje nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja kortikalnog koštanog tkiva.

Na temelju eksperimentalnih podataka i primjenom formulacija sličnih onima za inženjerske materijale predložen je konstitutivni model za akumuliranje oštećenja u kortikalnom koštanom tkivu koji spreže mehanizme oštećenja s efektima viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Pritom su postojeći modeli viskoelastičnosti i oštećenja te model viskopastičnosti iz literature spregnuti zajedno što do sada nije napravljeno. Pokazano je da je predloženi konstitutivni model primjenljiv na različite slučajeve cikličkih opterećenja koji uključuju puzanje materijala s naknadnim rasterećivanjem.

U okviru numeričkog modeliranja, izvedeni su jednodimenzijski i trodimenzijski numerički algoritmi za rješavanje konstitutivnih jednadžbi na razini materijalne točke te su implementirani u formulaciju konačnih elemenata. Iz prikazanih rezultata je vidljivo da predloženi numerički algoritam točno opisuje proces deformiranja kortikalnog koštanog tkiva za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima. Dobiveni eksperimentalni rezultati zajedno s predloženim numeričkim algoritmom omogućit će realnu analizu koštanih prijeloma.

SUMMARY

The bone tissue is heterogeneous material with anisotropic and viscous material properties. Micro damages to the bone occur during normal activities but they usually disappear during a continuous remodelling process. One of the most common assumptions is that bone damage is a result of cyclic loading. In that case, damage accumulation is faster than the remodelling process, which leads to bone fracture. A comprehensive constitutive model for cortical bone tissue is still not suggested due to a highly complex structure with nonlinear and time-dependent behaviour.

This thesis can be divided into two parts: experimental part and numerical modelling. First, an experimental investigation into mechanical properties for a special kind of composite material was carried out. That particular material was chosen because of its mechanical behaviour which is very similar to human cortical bone. We believe that such an approach enables the creation of more efficient and accurate constitutive models to be applied to bovine and human cortical bone tissues. Significant scattering of results was noticed when bovine cortical bone was used, resulting in uncertainty in the determination of material parameters. This was not the case with experiments carried out using the composite material. Besides the common tensile creep test, the bone was tested for the cyclic compressive creep with subsequent unloading. In order to deepen the understanding of the nonlinear and the time-dependent behaviour of cortical bone tissue, we investigated both axially and transversally taken specimens. The former way of taking specimens is very common while the latter could not be found in the available literature.

Based on experimental data, a constitutive model for damage accumulation in cortical bone tissue is proposed. This approach, which includes viscoelasticity, damage, and viscoplasticity, could not be found in the available literature. It is shown that the constitutive model proposed in this thesis can be applied to various cases of cyclic loading involving the creep of materials with subsequent unloading.

One-dimensional and three-dimensional numerical algorithms for solving constitutive equations at the material point level are implemented in the finite element formulation. Good correlation between our numerical computations and experimental results has been established. Thus, the proposed numerical algorithm accurately describes the process of cortical bone tissue deformation in the case of cyclic creep. Experimental results, together with the proposed numerical algorithm, will enable a realistic analysis of bone fracture.

KLJUČNE RIJEČI / KEYWORDS

Ključne riječi:

kortikalno koštano tkivo

puzanje - rasterećenje

viskoelastičnost

oštećenje

viskoplastičnost

eksperiment

metoda konačnih elemenata

Keywords:

cortical bone tissue

creep – recovery

viscoelasticity

damage

viscoplasticity

experiment

finite element method

POPIS KRATICA

CDM	<i>Continuum damage mechanics</i> (mehanika oštećenja)
D	oštećenje
GMT	<i>glass mat thermoplastic</i> (kompozit)
MKE	metoda konačnih elemenata
RVE	<i>Representative volume element</i> (reprezentativni volumenski element)
VE	viskoelastičnost
VP	viskoplastičnost

POPIS OZNAKA

<u>Oznaka</u>	<u>Opis</u>	<u>Jedinica</u>
Grčke oznake:		
α_n	set unutarnjih varijabli za opisivanje viskoelastičnosti,	
β_m	set unutarnjih varijabli za opisivanje plastične deformacije,	
Φ	specifična Gibbsova slobodna energija,	
δ_{ij}	Kronekerov simbol,	
ε	deformacija,	
ε_c	deformacija puzanja,	
ε_r	deformacija rasterećenja,	
ε_E	elastična deformacija,	
ε_{VE}	viskoelastična deformacija,	
ε_{VE}^D	viskoelastična deformacija spregnuta s oštećenjem,	
ε_{VP}	viskoplastična deformacija,	
$\Delta\varepsilon$	inkrement deformacije,	
$\dot{\varepsilon}_c$	brzina deformacije pri puzanju,	s ⁻¹
σ	Cauchyovo naprezanje,	MPa
σ_{th}^D	granično naprezanje akumuliranja oštećenja,	MPa
σ_{th}^{VP}	granično naprezanje akumuliranja viskoplastične deformacije,	MPa
$\Delta\sigma$	inkrement naprezanja,	MPa
$\tilde{\sigma}$	efektivno naprezanje,	MPa
Ψ	specifična Helmholtzova slobodna energija	

Latinske oznake:

A	viskoplastičan parametar materijala,	
A_k	termodinamičke sile,	
A_n	termodinamički koeficijent,	
B_m	termodinamička varijabla,	
\mathbf{C}	tenzor krutosti ,	
$\tilde{\mathbf{C}}$	tenzor efektivne krutosti,	
C	parametar oštećenja materijala,	
E	modul elastičnosti,	MPa
E_0	početni modul elastičnosti,	MPa
E_d	trenutni modul elastičnosti pri rasterećenju,	MPa
E_i	ukupni modul elastičnosti pri rasterećenju,	MPa
${}_2F_1()$	hipergeometrijska funkcija,	
$F_{t_n+\Delta t}^{(i)}$	iteracijska funkcija,	
f	funkcija,	
f_{t_n}	vrijednost funkcije na početku inkrementa,	
Δf	promjena funkcije,	
I_{ijkl}	jedinični tenzor,	
J_0	viskoelastičan parametar materijala,	
J_1	viskoelastičan parametar materijala,	
k_d	parametar oštećenja materijala,	
\mathbf{M}	tenzor oštećenja,	
m	viskoplastičan parametar materijala,	
n	viskoplastičan parametar materijala,	
T	temperatura,	K

R	gustoća snage toplinskih izvora,	
R^2	koeficijent determinacije,	
r	parametar oštećenja materijala,	
S	tenzor podatljivosti,	
\tilde{S}	tenzor efektivne podatljivosti,	
S	entropija,	
SS_{model}	suma kvadrata modela,	
SS_{ost}	suma kvadrata ostatka,	
t	vrijeme,	s
t_0	vrijeme puzanja,	s
t_a	vrijeme početka puzanja,	s
t_b	vrijeme završetka puzanja,	s
t_c	konstanta normalizacije,	s
t_F	vrijeme puzanja do loma,	s
Δt	inkrement vremena,	s
V	volumen,	m ³
w	parametar oštećenja materijala,	
w_0	oštećenje u početnom trenutku,	
w_F	oštećenje pri lomu,	
w_{pqrs}	tenzor 4. reda za opisivanje oštećenja,	
x	vrijednost funkcije na apscisi,	
y	vrijednost funkcije na ordinati.	

POPIS SLIKA

Slika 1. Longitudinalni presjek kroz bedrenu kost (<i>lat. femur</i>) [2].....	1
Slika 2. Dijagram toka koncepcije ovog rada	11
Slika 3. Hijerarhijska struktura koštanoga tkiva [20].....	14
Slika 4. Mikroskopska struktura kortikalnoga koštanoga tkiva [5] (a) skica kortikalne kosti, (b) presjek kroz Haversov sustav i (c) fotomikrografski prikaz Haversovog sustava	15
Slika 5. Periostalna i endostalna površina ljudske kosti [78].....	16
Slika 6. Proces koštane pregradnje: a) općenito [80], b) Haversovog kanala (sekundarnog osteona) [81].....	18
Slika 7. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za linearno elastičan materijal	25
Slika 8. Dijagrami ovisnosti naprezanja o deformaciji za nelinearno elastičan (a), plastičan (b), viskoelastičan (c) i viskoplastičan (d) materijal [87].....	26
Slika 9. Ponašanje materijala u uvjetima puzanja: a) krivulja naprezanja u ovisnosti o vremenu – naprezanje je konstantno i različito od nule od trenutka t_a do t_b , b) elastično ponašanje, c) plastično ponašanje, d) viskoelastično i viskoplastično ponašanje i e) viskozno ponašanje.	26
Slika 10. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja s vremenom (uzbuda) i ovisnosti deformacije s vremenom (odziv) kroz period puzanja i naknadnog rasterećenja	27
Slika 11. Hipoteze definiranja zakona oštećenja.....	29
Slika 12. Izotropno oštećenje pri jednoosnom stanju naprezanja (koncept efektivnog naprezanja) [34].....	30
Slika 13. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem kortikalne kosti (po analogiji za i -ti ciklus relaksacije prema [44]).....	36
Slika 14. Skica jednoosnog vlačnog eksperimenta materijala gdje pri opterećenju nastaje viskoelastična, viskoplastična deformacija te deformacija uslijed oštećenja [49]	37
Slika 15. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom ponašanju materijala	46
Slika 16. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom i viskoplastičnom ponašanju materijala [62].....	47

Slika 17. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom i viskoplastičnom ponašanju materijala uz pojavu oštećenja	48
Slika 18. Shematski prikaz dijagrama cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem	50
Slika 19. a) Kvazistatička kidalica Messphysik, Beta 50-5 za ispitivanje materijala b) Puzalica tipa CEAST 6110.....	51
Slika 20. Skica i fotografija dvije vrste epruveta a) manja i b) veća na kojima su provedeni eksperimenti	52
Slika 21. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja epruvete na puzanje s naknadnim rasterećivanjem. Istaknut je a) prvi i b) zadnji ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete	53
Slika 22. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za slučaj puzanja i naknadnog rasterećenja kompozitnoga materijala s postepenim povećavanjem razine opterećenja	54
Slika 23. Metatarzalna kost a) kortikalni dio goveđega koštanoga tkiva , b) anatomske položaj	55
Slika 24. Shematski prikaz: a) kosti s naznačenim osima, b) zona na poprečnom presjeku kosti s kojih su uzete ispitne epruvete u longitudinalnom smjeru, c) zona u poprečnom presjeku kosti s kojih su uzete ispitne epruvete u transverzalnom smjeru.	56
Slika 25. Longitudinalna epruveta izrezana vodenim mlazom iz goveđe kosti	57
Slika 26. Glodalom obradjena epruveta	58
Slika 27. Skica i fotografija epruvete iz goveđega kortikalnoga koštanoga tkiva namijenjena za vlačne (8(6)×3) i tlačne (8(6)×6) eksperimente cikličkog puzanja	58
Slika 28. Obrada epruvete dimenzija a) 10(6)×3 mm u longitudinalnom smjeru, b) 8(4,5)×3 mm u transverzalnom smjeru glodalom 308.120.25	59
Slika 29. Skica i fotografija epruveta iz goveđeg kortikalnog koštanoga tkiva dimenzija a) 10(6)×3 mm u longitudinalnom smjeru, b) 8(4,5)×3 mm u transverzalnom smjeru. 60	
Slika 30. Uzorak goveđeg kortikalnog koštanoga tkiva omotan vlažnom vatom tijekom a) vlačnog i b) tlačnog eksperimenta.....	61
Slika 31. Lom epruvete prilikom tlačnog eksperimenta puzanja s naknadnim rasterećenjem 61	
Slika 32. Epruvete korištene za cikličke tastove puzanja s naknadnim rasterećenjem	62

Slika 33. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem goveđe kosti. Istaknut je a) prvi i b) zadnji ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete	62
Slika 34. Dijagram ovisnosti deformacije puzanja o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem pri naprezanju u iznosu od 90 MPa za 6 epruveta i njihove uprosječene vrijednosti	63
Slika 35. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećanjem razine opterećenja.....	64
Slika 36. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj tlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja.....	65
Slika 37. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja na transverzalnim epruvetama	65
Slika 38. Raspored uzoraka po zonama na poprečnom presjeku ljudskoga kortikalnoga koštanoga tkiva [30].	66
Slika 39. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za ljudsko kortikalno koštano tkivo za slučaj puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja [30].	67
Slika 40. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja o deformaciji za određivanje podatljivosti pri rasterećenju (J_d) i početne podatljivosti (J_0) [105].	70
Slika 41. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o naprezanju za kompozitni materijal.....	71
Slika 42. Ovisnost brzine deformacije o naprezanju za kompozitni materijal.....	72
Slika 43. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za kompozitni materijal	73
Slika 44. Ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) za kompozitni materijal	74
Slika 45. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju provedenom u procesu puzanja za kompozitni materijal	74
Slika 46. Ovisnost viskoelastične deformacije o vremenu i naprezanju za kompozitni materijal.....	75
Slika 47. Ovisnost vremena puzanja do loma o naprezanju za kompozitni materijal.....	76
Slika 48. Ovisnost deformacije o vremenu i naprezanju za kompozitni materijal.....	77

Slika 49. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju puzanja s rezultatima model za kompozitni materijal.....	78
Slika 50. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju rasterećenja s rezultatima model za kompozitni materijal.....	78
Slika 51. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o naprezanju goveđega kortikalnoga koštano tkiva.....	79
Slika 52. Ovisnost brzine deformacija o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo.....	80
Slika 53. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo.....	81
Slika 54. Ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) za goveđe kortikalno koštano tkivo	81
Slika 55. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za slučaj puzanja za goveđe kortikalno koštano tkivo	82
Slika 56. Ovisnost viskoelastične deformacije o vremenu i naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo	83
Slika 57. Ovisnost vremena puzanja do loma o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo.....	84
Slika 58. Ovisnost deformacije o vremenu i naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo	85
Slika 59. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju puzanja s rezultatima modela za goveđe kortikalno koštano tkivo	85
Slika 60. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju rasterećenja s rezultatima modela za goveđe kortikalno koštano tkivo	86
Slika 61. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o naprezanju za ljudsko kortiklano koštano tkivo	87
Slika 62. Ovisnost brzine deformacije o naprezanju za ljudsko kortiklano koštano tkivo	87
Slika 63. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za ljudsko kortiklano koštano tkivo.....	88
Slika 64. Deformacija puzanja i rasterećenja u ovisnosti o naprezanju i vremenu za ljudsko kortikalno koštano tkivo	89
Slika 65. Algoritam za integriranje nelinearnog konstitutivnog modela za jedan vremenski korak [106]	91
Slika 66. Dijagram toka za viskoelastično ponašanje materijala	98
Slika 67. Dijagram toka za viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala	99

Slika 68. Dijagram toka za viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala spregnuto s oštećenjem.....	100
Slika 69. Štapni konačni element s dva stupnja slobode T2D2 a) definicija čvorova, b) broj i položaj točke integracije [68] c) narinuti rubni uvjeti.....	113
Slika 70. Konačni element C3D8 a) definicija čvorova, b) broj i položaj točaka integracije [68], c) primjenjeni rubni uvjeti	114
Slika 71. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za kompozitni materijal pri naprezanju od 30 MPa	116
Slika 72. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za kompozitni materijal pri naprezanju od 60 MPa	116
Slika 73. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 70 MPa	117
Slika 74. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 110 MPa	118
Slika 75. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 60 MPa	119
Slika 76. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 75 MPa	119
Slika 77. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 90 MPa	119
Slika 78. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanja u iznosu od: a) 63,43 MPa, b) 74,73 MPa, c) 66,97 MPa, d) 61,55 MPa i e) 59,66 MPa	121
Slika 79. Usporedba jednodimenzijske i trodimenzijske analize puzanja za goveđe kortikalno koštano tkivo za naprezanje od 110 MPa.....	122
Slika 80. Analiza puzanja u trenutku $t=60$ s za goveđe kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 110 MPa u programu Abaqus.....	122

POPIS TABLICA

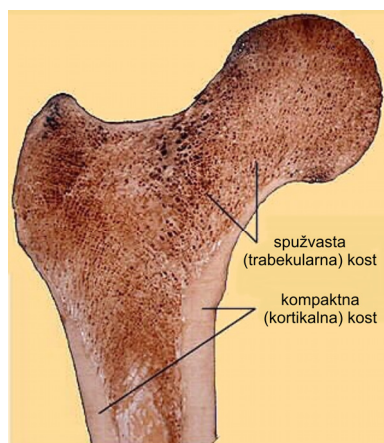
Tablica 1. Elastične konstante za kortikalno koštano tkivo [83].....	22
Tablica 2. Rezultati statičkog vlačnog ispitivanja kompozitnog materijala s dvije različite kidalice	52
Tablica 3. Tablični prikaz karakteristika kompozitnog materijala danih od proizvođača [96]	52
Tablica 4. Tablični prikaz parametara za kompozitni materijal.....	76
Tablica 5. Tablični prikaz parametara materijala za goveđe kortikalno koštano tkivo.....	84
Tablica 6. Tablični prikaz parametara materijala za ljudsko kortikalno koštano tkivo	89
Tablica 7. Parametri materijalnog modela dobiveni eksperimentalno testom puzanja [34] .	120

1. UVOD

Po svojoj jedinstvenoj strukturi kost je jedan od značajnijih i djelotvornijih organa. Koštani sustav tijela je prvenstveno potpora tijelu te zajedno s mišićnim tkivom omogućava kretanje, zatim štiti organe u tjelesnim šupljinama, hvatište je mišićima, mjesto je stvaranja krvnih stanica te je biokemijski regulator koncentracije kalcija i drugih minerala u organizmu. Razumijevanje i modeliranje mehaničkog ponašanja koštanog tkiva od velike je važnosti.

1.1. Općenito o koštanom tkivu

Dva su osnovna tipa građe koštanog tkiva na makroskopskoj razini: kortikalna (kompaktna) kost i spužvasta (spongiozna-trabekularna) kost. Slika 1 prikazuje longitudinalni presjek kroz bedrenu kost (*lat. femur*) gdje se vide osnovni tipovi građe koštanog tkiva. Kortikalna kost nalazi se na periferiji dok je porozno (spužvasto) tkivo u unutrašnjosti zajedno s medijalnim kanalom. Od spužvaste kosti uglavnom su izgrađeni kralješci i epifizni dio velikih zglobova, dok je od kortikalne kosti sačinjen korteks dugih kostiju. Najveći dio metabolizma odvija se u spužvastoj kosti, dok kortikalna kost ima prvenstveno mehaničku i protektivnu funkciju [1].



Slika 1. Longitudinalni presjek kroz bedrenu kost (*lat. femur*) [2]

Podjelu na spužvastu i kortikalnu kost određuje njihova poroznost i različitost u svojstvima materijala. Kortikalno koštano tkivo ima gušću mikrostrukturu s poroznosti oko 5-

10 % i ima 80 % ukupne mase skeleta, dok spužvasto koštano tkivo ima poroznost od 50 do 95 % i na njega otpada 20 % ukupne mase skeleta. Mehanička svojstva i uloga u mineralnom metabolizmu oba tipa kosti bitni su za kvalitetu kosti [3], [4] i [5].

Upravo takva geometrija kosti je optimalna kako bi se minimizirala njena težina, reducirala naprezanja u zglobnim točkama i omogućilo tijelu da izdrži velika funkcijska opterećenja. Kao konstrukcijski materijal kost ima idealnu kombinaciju svojstava za svoju primjenu: visoku krutost, čvrstoću i lomnu žilavost, a razmjerno malu masu. Odlična mehanička svojstva kosti se pripisuju njenoj složenoj hijerarhijskoj strukturi od pod-nanostrukture do cijelog modela kosti [6].

1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

Modeliranje oštećenja i mehanizma pregradnje u biološkim tkivima posljednjih godina sve više je predmet istraživanja znanstvenika. Pritom se najveći broj radova odnosi na koštano tkivo. Prisutan je velik broj radova eksperimentalnih istraživanja u kojima su dana mehanička svojstva kortikalnoga koštanoga tkiva, ali i velik broj publikacija u kojima su predloženi konstitutivni modeli za kortikalnu kost s pripadnim numeričkim algoritmima za rješavanje konstitutivnih jednadžbi. Iz tog razloga će se ovdje pregled dosadašnjih istraživanja u području kortikalnoga koštanoga tkiva podijeliti na publikacije u kojima su provedena eksperimentalna istraživanja i publikacije s numeričkim modeliranjem.

Većina dosadašnjih publikacija različitim eksperimentalnim tehnikama istražuju mehaničke karakteristike kortikalnoga koštanoga tkiva na makro nivou. Tako elastična svojstva, tradicionalnim mehaničkim tehnikama kao što su statička vlačna i tlačna ispitivanja istražuju Reilly i Burstein [7] te Currey [8], torzijskim ispitivanjima Jepsen i Davy [9], biaksijalnim ispitivanjima Lakes sa suradnicima [10] ili ispitivanjima na savijanje Currey [8]. Pored navedenih klasičnih mehaničkih ispitivanja često je korištena ultrazvučna tehnika koja je korisna metoda za određivanje elastičnih svojstava kortikalnoga koštanoga tkiva, a koriste ju Lang [11], [12], Pithioux sa suradnicima [13] te Rho [14]. Prednost ove metode je u određivanju svih anizotropnih elastičnih konstanti na istom uzorku. Mikrostrukturalna heterogenost i anizotropna elastična svojstva mogu biti mjerena i s tehnikom nano-utiskivanja što su prikazali Hoffler sa suradnicima [15] te Rho sa suradnicima [16]. Velik je broj publikacija koje prikazuju funkcije ovisnosti mehaničkih svojstava o gustoći kosti, što se može pronaći u publikacijama na primjer Wirtza sa suradnicima [17] i Wachtera sa

suradnicima [18]. Helgason i suradnici [19] također preglednim radom daju ovisnost mehaničkih svojstava o gustoći. Rho i suradnici [20] pokazuju da mehanička svojstva kosti na makro razini variraju od jedne do druge kosti, isto kao i unutar različitog područja na istoj kosti. Nekoliko publikacija odnosi se na anatomske razlikovitosti na makro razini mehaničkih svojstava kortikalnog i trabekularnog koštanog tkiva čiji je autor Pope sa suradnicima [21]. Pojedine publikacije analiziraju razlike između mehaničkih svojstava kortikalnog i trabekularnog koštanog tkiva, kao npr. Turner sa suradnicima [22] i Bayraktar sa suradnicima [23]. Macione sa suradnicima [24] istražuje ovisnost između radijalnog, cirkularnog i longitudinalnog modula elastičnosti kortikalnoga koštanoga tkiva o različitom mineralnom sastavu. Opće je prihvaćeno da je modul elastičnosti kortikalnoga koštanoga tkiva približno isti za vlačno i tlačno opterećenje, što ističu Reilly i Burstein [25]. Ispitivanjem epruvete na savijanje u četiri točke Barak i suradnici [26] istražuju odnose vlačnih i tlačnih modula elastičnosti kortikalnog konjskog koštanog tkiva. Oni pokazuju da je vlačni modul elastičnosti 6 % veći od tlačnoga modula. Rho i suradnici [16] daju pregled mikromehaničkih ispitivanja elastičnih svojstava pojedinačnih trabekula i osteona. U publikaciji [20] Rho daje pregled istraživanja koje provodi Ascenzi i suradnici koji ispituju mehanička svojstva jednog Haversovog sustava vlačno, tlačno, savijanjem i uvijanjem. Oni zaključuju da su osteoni s longitudinalnim lamelama bolji pri vlatku i uvijanju, te krući pri savijanju, dok su osteoni s pripadajućim lamelama prikladniji za savijanje. U posljednje vrijeme elastične karakteristike kosti određuju se kombinacijom kompjutorske tomografije (CT) i konačnih elemenata, kao što je to opisano u publikaciji Huanga sa suradnicima [27]. Ovdje se na osnovu CT skeniranja generira mreža konačnih elemenata te se na temelju nano-utiskivanja dobiva ovisnost opterećenja o deformaciji. Na osnovu toga se određuju parametri koji definiraju modul elastičnosti u funkciji CT skeniranja.

Pregled mehaničkih svojstava kortikalnoga koštanoga tkiva prikazuju Reilly i Burstein u svom radu [25], gdje posebno analiziraju elastično, viskoelastično ponašanje kortikalnoga koštanoga tkiva, te plastičnu deformaciju, čvrstoću, zamor i iniciranje loma. Doblare sa suradnicima [4] publicira pregledni rad gdje ističe ovisnosti mehaničkih svojstava koštanog tkiva o gustoći i mineralnom sastavu, zatim govori o mehanizmima loma, kriteriju loma, te zacjeljivanju koštanog tkiva nakon loma.

Mehaničke karakteristike kortikalnoga koštanoga tkiva nisu samo odraz promjena u njegovoj mikrostrukturi, nego su odraz promjena i drugih faktora kao što su brzina opterećivanja, odnosno brzina deformiranja, što je prikazano u publikaciji Hansena i

suradnika [28]. Melnis i Knets [29] također su pokazali da je koštano tkivo kao viskoelastičan materijal osjetljiv na brzinu deformiranja. Viskoelastična svojstva kortikalnoga koštanoga tkiva cikličkim ispitivanjem puzanja s naknadnim rasterećivanjem istražuju Melnis sa suradnicima [30] i Fondrk sa suradnicima [31], [32]. Nadalje, ispitivanja relaksacije s naknadnim rasterećivanjem istražuje Phillips sa suradnicima [33]. Fondrk sa suradnicima [31] provodi ciklična vlačna ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem na uzorcima iz ljudske i goveđe kortikalne kosti, gdje pri svakom novom ciklusu povećava opterećenje. Rezultati su pokazali da se uzorak do određene vrijednosti graničnog naprezanja ponaša linearno viskoelastično, a iznad te vrijednost naprezanja dolazi do akumuliranja deformacije puzanja pri čemu se povećava podatljivost materijala te uzorak pokazuje nelinearno ponašanje [34-36]. Nadalje, Fondrk sa suradnicima [32] također provodi opsežna istraživanja nelinearnog ponašanja kortikalne kosti i zaključuje da je ovu kost najbolje opisati kao viskoelastičan materijal s oštećenjem. Osim toga, prikazano je da niz ciklusa opterećenje-rasterećenje s opterećenjem iznad određene granične vrijednosti naprezanja uzrokuje degradaciju krutosti kosti, što s povećanjem deformacija puzanja uzrokuje nelinearno ponašanje i trajne deformacije. Na taj način je u radu [31] zaključeno da se za opisani način opterećivanja u kortikalnoj kosti javlja osim degradacije modula elastičnosti i trajna deformacija, što se tumači kao efekt oštećenja, ali i efekt plastičnosti. Pri tom se javlja problem ispravnog definiranja kriterija za razdvajanje ova dva efekta i njihovo odvojeno opisivanje.

Eksperimentima čistog smicanja Turner sa suradnicima [37] određuje zamorna svojstva kortikalnoga koštanoga tkiva. Osim toga, mnoge eksperimentalne studije istražuju zamorno ponašanje kortikalne kosti (Zioupou i Casinos [38]). Mehanizme loma u koštanom tkivu istražuje Ritchie sa suradnicima [39]. Za bolje razumijevanje principa mehanike loma u koštanom tkivu Wang i Nyman [35] su u novije vrijeme razvili shemu opterećivanja koja daje detaljnije informacije o mehaničkim svojstvima u ovisnosti o porastu deformacije. Ovim ispitivanjima ne samo da se definira promjena modula elastičnosti i relaksacije naprezanja s povećanjem deformacije, već se dodatno pojašnjavaju mehanizmi nastanka trajne deformacije, petlje histereze i akumuliranja oštećenja kao mjera degradacije modula elastičnosti. Isti problem analizira i Nyman sa suradnicima [36] pri vlačnom i tlačnom pokusu relaksacije. U publikaciji [40] autori provode istraživanje na dvije starosne skupine pri tlačnom pokusu relaksacije. Leng i suradnici [41] također istražuju ponašanje kortikalne kosti

uslijed cikličke relaksacije s naknadnim rasterećivanjem gdje se postepeno povećava opterećenje. Osim toga, oni daju usporedbu rezultata monotonog i cikličkog ispitivanja.

Akumuliranje oštećenja uzrokuje progresivno narušavanje homogenosti materijala, a taj gubitak cjelovosti (integriteta), koji se pripisuje mikroskopskim pukotinama i/ili prazninama, ima nepovoljan utjecaj na mehanička svojstva. Provedena su brojna istraživanja kako bi se oštećenje kosti povezalo s degradacijom njenih svojstava preko histoloških opažanja.

Dosadašnja istraživanja ukazuju da je akumuliranje mikrooštećenja glavni razlog disipacije energije u kostima. Na primjer, Kotha i Guzelsu [42] provode ciklička ispitivanja na uzorcima goveđe kosti kako bi okarakterizirali učinke oštećenja na mehaničko ponašanje dekalificiranog uzorka (organska matrica) i uzorka koštanog tkiva koji se čuvao u fiziološkoj otopini. Zaključuju da je oštećenje u kosti uzrokovano smanjenjem smične čvrstoće organske matrice, što predstavlja transverzalno odvajanje molekula kolagena ili međusobno odvajanje mikrofibrila.

Ponašanje kosti uglavnom je povezano s: (1) akumuliranjem mikrooštećenja (promjenom krutosti), (2) viskoelastičnim ponašanjem (petlja histereze) i (3) plastičnom (trajnom) deformacijom. Osim toga, studije pokazuju da se viskozno ponašanje kosti povećava s povećanjem deformacije iznad granice tečenja (Wanga i Nymana [35] te Yenja i suradnika [43]). U [35] i [36] provedeni su pokusi relaksacije s vlačnim i tlačnim opterećivanjem uzoraka ljudske kortikalne kosti, te je navedena promjena modula elastičnosti i energije deformiranja s povećanjem deformacije. Luo sa suradnicima [44] daje prijedlog konstitutivnih relacija koje povezuju akumuliranje oštećenja s mehaničkim karakteristikama kortikalne kosti. Ove relacije uključuju ovisnost plastične deformacije, kao i viskoplastičnih parametara materijala o akumuliranom oštećenju. Akumuliranje oštećenja koje se uglavnom predstavlja kao degradacija elastičnih svojstava materijala u novije vrijeme je predmet analize bilo eksperimentalno bilo numerički, ali još uvijek nije do kraja razjašnjeno treba li akumuliranje oštećenja i akumuliranje plastičnih deformacija u kortikalnoj kosti promatrati spregnuto ili odvojeno.

Većina dosadašnjih konstitutivnih modela koji se temelje na mehanici oštećenja i termodinamici kontinuuma razmatraju samo mehaničke utjecaje pri analizi oštećenja u kostima. No kost je živo tkivo i njena struktura i sastav se neprestano mijenja s vanjskim mehaničkim utjecajima, starošću, prehranom i drugim faktorima. U zadnjih nekoliko godina javila se ideja za sprežanjem mehaničkih i bioloških utjecaja s nizom otvorenih pitanja kao što

su brzina akumuliranja oštećenja i pregradnje te utjecaj stupnja deformacije i mikrooštećenja na mehanizam aktiviranja pregradnje.

Polazna literatura koja je ujedno bila i motivacija za ovu disertaciju je rad [34] u kojem je primjenom relacija mehanike kontinuuma izveden model akumuliranja oštećenja kortikalnog koštanog tkiva spregnutog s viskoelastičnosti za slučaj puzanja. Na temelju eksperimentalnih rezultata određeni su parametri materijala za definirani konstitutivni model. Nedostatak ovog rada je što predloženi konstitutivni model ne opisuje dovoljno točno proces deformiranja kosti za slučaj opterećenja iznad graničnog naprezanja koje uzrokuje akumuliranje oštećenja. To je bio povod da se u ovom radu detaljnije istraže razlozi nepodudaranja eksperimentalnih rezultata s vrijednostima koje daje konstitutivni model za naprezanja iznad graničnog kod kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja u materijalu. Pritom je konstitutivni model koji spreže viskoelastičnost s oštećenjem preuzet od Abdel-Tawaba i Weitsmana [45, 46] koji su ga predložili za opisivanje ponašanja kompozita. Osim toga, Abdel-Tawaba i Weitsmana, kao i Parsamian u svom radu [34] zanemaruju utjecaj viskoplastične deformacije na proces deformiranja kompozita odnosno kortikalne kosti.

Iz pregleda navedene literature može se zaključiti da zbog nedovoljnog poznavanja temeljnog mehanizma oštećenja, odgovarajuće konstitutivne relacije koje sprežu akumuliranje oštećenja u koštanom tkivu s viskoznim efektima još uvijek nisu dovoljno točno definirane.

U okviru numeričkog modeliranja procesa deformiranja koštanog tkiva primjenjuje se uglavnom metoda konačnih elemenata. Garcia u svojoj disertaciji [5], te u naknadnim publikacijama sa suradnicima [47] i [48] predlaže elasto-plastičan zakon oštećenja za kortikalnu kost pri cikličkom opterećenju. Konstitutivne relacije kombiniraju elastičnost, plastičnost i oštećenje. Razvoj numeričkih algoritama koji sprežu vremenski ovisno ponašanje kortikalnoga koštanoga tkiva s mehanizmom akumuliranja oštećenja predmet je trenutnih istraživanja [5, 47, 48]. U radovima [47, 48] predložena je jednodimenzijska odnosno trodimenzijska izotropna numerička formulacija. Pod pojmom oštećenja ovdje se podrazumijeva stvaranje mikropukotina (smanjenje krutosti), zatim disipacija energije (područje petlje histereze), te trajne deformacije. Nasuprot tome, efekti plastičnosti povezani su s trenjem klizanja na mikropukotinama.

Vlačne pokuse s relaksacijom naprezanja na uzorcima iz spužvaste kosti kralježnice proveo je Bredbener u svojoj disertaciji [49]. Ovdje je predložen konstitutivni model baziran na fenomenološkoj mehanici oštećenja za opisivanje vremenski ovisnog ponašanja spužvaste

kosti u sprezi s efektima oštećenja. Na osnovu njegove disertacije nastaju njegova dva rada u tom području [50] i [51]. Konstitutivni model koji se temelji na teorijama viskoelastičnosti i viskoplastičnosti s pripadnom numeričkom formulacijom definirao je Natali sa suradnicima [52]. Pritom je promjena modula elastičnosti s opterećenjem opisana matematičkim izrazom čiji su parametri određeni na osnovu eksperimentalnih rezultata vlačnog ispitivanja puzanja ljudske kortikalne kosti iz literature [30]. Viskoelastičan i viskoplastičan model temeljen na reološkim modelima za kortikalno koštano tkivo koji vrijedi za slučaj kako malih, tako i velikih brzina deformiranja predložen je u novijem istraživanju Johnsona sa suradnicima [53]. Primjenom metode konačnih elemenata simulirana su udarna opterećenja kosti. Eksperimente utiskivanja provodi Zhang sa suradnicima u radu [54]. Zaključeno je da je plastični model s oštećenjem pogodniji za opisivanje procesa utiskivanja od visko-elasto-plastičnog modela, jer može dobro opisati promijene i pri opterećenju i pri rasterećenju.

Melnisova [30] i Fondrkova [31] eksperimentalna istraživanja sa suradnicima pokazala su da se prilikom cikličkog procesa puzanja u kortikalnom koštanom tkivu na kraju perioda rasterećenja akumulira trajna viskoplastična deformacija. Većina autora, kao što je to slučaj i u radu [34], zanemaruje utjecaj viskoplastične deformacije što ima za posljedicu veća odstupanja rezultata konstitutivnog modela i eksperimentalnih mjerenja, pogotovo za slučaj većih opterećenja, neposredno prije loma kosti. Osim za biološka tkiva, tijekom posljednja dva desetljeća brojna su nastojanja usmjerena na opisivanje viskoplastičnog ponašanja polimernih, odnosno kompozitnih materijala tijekom procesa puzanja. Pritom se za opisane probleme u literaturi najčešće koristi konstitutivni model koji su predložili Zapas i Crissman [55]. Ovaj Zapas-Crissmanov model viskoplastičnosti koriste Tuttle [56], Pasricha i Emery [56], Guedes sa suradnicima [57], Gamby sa suradnicima [58], Nordin i Varna [59], Marklund sa suradnicima [60], [61], Dasappa sa suradnicima [62], [63], Boyd sa suradnicima [64], Mui [65] i mnogi drugi kako bi opisali viskoplastično ponašanje deformiranja kompozitnih materijala. Boyd sa suradnicima [64] te Mui [65] u ovaj model viskoplastičnosti uključuju i temperaturnu ovisnost. Zapas-Crissmanov model viskoplastičnosti koji će se primijeniti u ovom radu, do sada u literaturi nije korišten za opisivanje viskoplastičnih deformacija kortikalnoga koštanoga tkiva, već se taj model uglavnom primjenjuje za kompozitne materijale za slučaj puzanja.

U literaturi su izvedeni algoritmi za modeliranje kortikalnoga koštanoga tkiva, no samo rijetki objedinjuju efekte viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja. U skladu s opisanim dosadašnjim istraživanjima, kao i otvorenim pitanjima na koje je potrebno odgovoriti kod

tumačenja efekta oštećenja i efekta plastične deformacije, može se zaključiti da je područje eksperimentalnog i numeričkog modeliranja procesa deformiranja koštanog tkiva u velikoj mjeri otvoreno za istraživanje.

Kako su u ovom radu provedena ekperimentalna istraživanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem na goveđem kortikalnom koštanom tkivu, u nastavku pregleda istraživanja dat će se kratki pregled metoda koje su u literaturi koriste za pripremu uzoraka iz kosti za mehanička ispitivanja. Poznato je da je najbolje, ako je to moguće, što prije na svježem kortikalnom koštanom tkivu provesti eksperimentalna ispitivanja. Također je poznato da duboko zamrzavanje neznatno utječe na mehanička svojstva koštanog tkiva, ako taj period nije dulji od nekoliko tjedana što je istražio Knets u radu [66]. Međutim dosta autora drži kosti duboko zamrznute prije ispitivanja i dulji vremenski period. Van Haaren i suradnici [67] tvrde da se zamrznute kosti mogu koristiti za mehanička ispitivanja u razdoblju i od jedne godine. Naime, zamrzavanje kortikalnog koštanog tkiva od kože u periodu od godine dana nije imalo znatnog utjecaja na mehanička svojstva materijala.

Za nelinearni zakon puzanja s naknadnim rasterećivanjem i složene cikličke uvjete opterećivanja, komercijalni programski paket koji se temelji na metodi konačnih elemenata ABAQUS [68], [69] zahtijeva razvoj vlastitog koda i primjenu korisničke rutine UMAT. Tako Ouyang u svojem radu [70] pokazuje postupak implementacije numeričkog algoritma za modeliranje puzanja u ABAQUSu. Modeliranje procesa puzanja s naknadnim rasterećenjem u ABAQUSu proveli su Ahci i Talreja [71] te Vidala-Sallea i Chassagne [72].

1.3. Motivacija

Poticaj izradi ovog rada su otvorena pitanja i nedostaci uočeni u okviru dosadašnjih istraživanja pronađenih u dostupnoj literaturi. Iz izloženog pregleda dosadašnjih istraživanja može se uočiti da ima još dosta otvorenih pitanja u okviru eksperimentalnog, kao i numeričkog modeliranja procesa deformiranja kortikalnog koštanog tkiva. To se prvenstveno odnosi na nedovoljno poznavanje mehanizma oštećenja tako da odgovarajuće konstitutivne relacije koje sprežu akumuliranje oštećenja u koštanom tkivu s viskoznim efektima još uvijek nisu dovoljno točno definirane.

Kao što je već opisano u pregledu dosadašnjih istraživanja motivacija za ovu disertaciju je Parsamianov rad [34] u kojem je akumuliranje oštećenja kortikalnog koštanog tkiva spregnutog s viskoelastičnosti za slučaj puzanja opisano konstitutivnim modelom preuzetim

od Abdel-Tawaba i Weitsmana [45, 46] koji su ga predložili za opisivanje ponašanja inženjerskih materijala, ponajprije kompozita. Kako u ovom radu navedeni konstitutivni model ne opisuje dovoljno točno proces deformiranja kosti za slučaj opterećenja višeg od graničnog naprezanja koje uzrokuje akumuliranje oštećenja, to je bila motivacija da se provede detaljnije istraživanje razloga nepodudaranja eksperimentalnih rezultata s rezultatima konstitutivnog modela. Osim toga, kako Abdel-Tawab i Weitsman za analizu kompozitnih materijala, kao i Parsamian u svom radu [34] za analizu ljudske kortikalne kosti, zanemaruju utjecaj viskoplastične deformacije, to je bio povod istraživanja mogućnosti proširenja konstitutivnog modela koji će sprežati efekte viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja za slučaj malih deformacija. U navedenom radu [34] na ljudskom kortikalnom koštanom tkivu nisu provedena ispitivanja naknadnog rasterećivanja nakon vlačnog puzanja iz čega bi se pružio bolji uvid u iznos plastične deformacije. Eksperiment rasterećivanja također je važan zbog boljeg i točnijeg određivanja viskoelastičnih parametara materijala.

Sljedeći motiv za provedbu istraživanja u ovom području su rezultati eksperimentalnih istraživanja iz literature na ljudskom kortikalnom koštanom tkivu (npr. Melnisa sa suradnicima [30] i Fondrka sa suradnicima [31]) koji ukazuju važnost uključivanja, osim efekta oštećenja i efekta viskoplastične deformacije u konstitutivni model. Ovdje se u literaturi ističe problem ispravnog definiranja kriterija za razdvajanje efekta oštećenja i efekta viskoplastičnosti te njihovo odvojeno opisivanje. Sve to je motiviralo provedbu eksperimentalnih istraživanja u ovom radu kako bi se na temelju rezultata eksperimenta izveo konstitutivni model koji će sprežati navedene efekte. Osim toga, pretpostavljeno je da će ovi rezultati omogućiti točniju procjenu parametara materijala kao i graničnih naprezanja kod kojih dolazi do akumuliranja oštećenja, odnosno viskoplastične deformacije.

1.4. Hipoteza rada

U radu će se pokušati riješiti otvorena pitanja navedena u prethodnom poglavlju. U okviru eksperimentalnih istraživanja cilj je najprije istražiti proces deformiranja kompozitnog materijala koji ima slično mehaničko ponašanje kao ljudska kortikalna kost. Pretpostavka je da će to omogućiti efikasnije i točnije definiranje konstitutivnog modela, koji bi osim na analizirani kompozitni materijal bio primjenjiv i na goveđe i ljudsko kortikalno koštano tkivo. Razlog tome je što se kod eksperimentalnog istraživanja goveđeg kortikalnog koštanog tkiva očekuje veće „rasipanje“ rezultata što će otežati procjenu parametara materijala i ocjenu

opravdanosti primjene predloženog konstitutivnog modela. Osim za slučaj vlačnog puzanja, namjera je istražiti ponašanje kosti za slučaj cikličkog tlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem što do sada nije poznato. Na taj način, planirana eksperimentalna istraživanja omogućit će bolje razumijevanje nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja kortikalnog koštanog tkiva.

Pretpostavka je da će se na temelju eksperimentalnih podataka i primjenom formulacija sličnih onima za inženjerske materijale izvesti konstitutivni model za akumuliranje oštećenja u kortikalnom koštanom tkivu koji će omogućiti sprežanje mehanizma oštećenja s efektima viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Cilj je postojeće modele viskoelastičnosti i oštećenja te modele viskoplastičnosti iz literature spregnuti zajedno. Pritom je cilj definirati kriterij za razdvajanje efekata oštećenja i viskoplastičnosti tako da se mogu odvojeno modelirati. Pretpostavlja se da će predloženi konstitutivni model biti primjenljiv na različite slučajeve cikličkih opterećenja koja će uključivati puzanje materijala s naknadnim rasterećivanjem.

U okviru numeričkog modeliranja, cilj je izvesti jednodimenzijski i trodimenzijski numerički algoritam za rješavanje konstitutivnih jednadžbi na razini materijalne točke te ga implementirati u formulaciju konačnih elemenata. Pretpostavka je da će predloženi numerički algoritam točno opisivati proces deformiranja kortikalnog koštanog tkiva za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima. Osim toga, pretpostavlja se da će algoritmi biti točniji i numerički učinkovitiji u odnosu na algoritme iz literature.

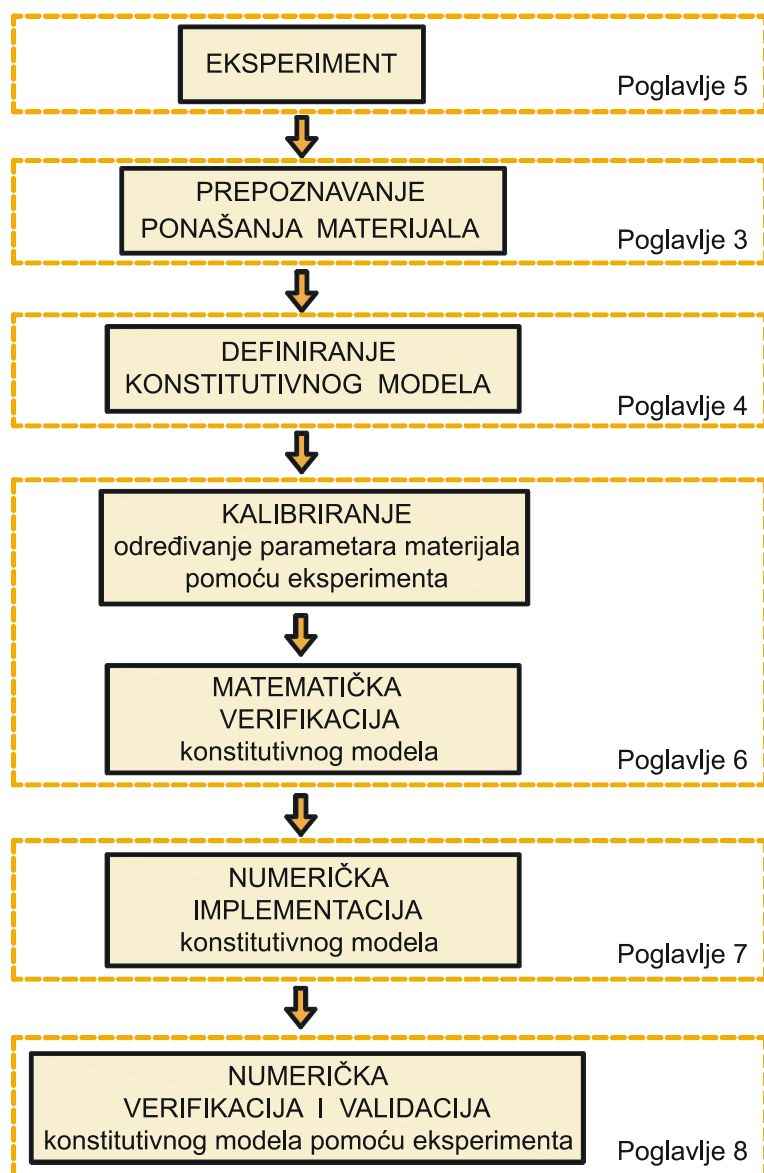
1.5. Opis istraživanja

Provedeno istraživanje je teorijskog, eksperimentalnog i numeričkog karaktera, time i takva podjela dijeli ovaj rad u zasebne cjeline. Najprije je prikazana teorijska pozadina, zatim eksperimentalni postupak s rezultatima i nakon toga numerička formulacija, čiji su rezultati verificirani i validirani s eksperimentalnim. Od eksperimentalnih postupaka koriste se ciklička ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem kod kojih se u svakom novom ciklusu povećalo naprezanje. Od numeričkih metoda koristi se metoda konačnih elemenata (MKE) [73]. Za to je primijenjen komercijalni programski paket ABAQUS [68, 69] koji se temelji na ovoj numeričkoj metodi. Izvedeni numerički algoritmi implementirani su u navedeni program primjenom korisničke rutine UMAT. Pregled istraživanja po poglavljima prikazan je u predgovoru ovog rada. Formulacija konstitutivnog modela odgovara onoj koju je predložio

Humphrey u svom preglednom radu [74]. On predlaže pet osnovnih koraka za formulaciju konstitutivnih relacija:

- a) prepoznavanje općih značajki ponašanja materijala,
- b) uspostavljanje odgovarajućih teorijskih okvira,
- c) identifikacija specifičnih funkcijskih oblika konstitutivnih relacija,
- d) određivanje vrijednosti parametara materijala i
- e) verifikacija rezultata.

Na osnovu navedenih koraka slijedi i globalni koncept ovog rada koji je prikazan dijagramom na slici 2.



Slika 2. Dijagram toka koncepcije ovog rada

Verifikacijom se provjerava da li je predloženi konstitutivni model pomoću kojeg će se realizirati simulacija ispravan u odnosu na konceptualni model, a validacijom se provjerava da li je konstitutivan model dovoljno ispravan te ga se uspoređuje s eksperimentalnim istraživanjima.

Pod pojmom eksperiment, što je prvi korak u dijagramu toka na slici 2 podrazumijeva se: definiranje plana eksperimenta, priprema eksperimentalnih uzoraka, kreiranje programa za kidalicu na kojoj se provodi ispitivanje, provođenje eksperimenta, prikupljanje podataka, obrada podataka te analiza i interpretacija rezultata.

2. STRUKTURA I MEHANIČKE KARAKTERISTIKE KOŠTANOGA TKIVA

U ovom poglavlju bit će riječi o kompleksnoj hijerarhijskoj strukturi koštanoga tkiva. Pritom razlikujemo pet stupnjeva organizacije koštanoga tkiva počevši od makroskopske razine, od svega nekoliko milimetara pa do pod-nano razine, koja ide ispod nekoliko stotina nanometara. Zatim će biti riječi o koštanoj pregradnji, te mehaničkim karakteristikama koštanog tkiva.

2.1. Struktura koštanoga tkiva

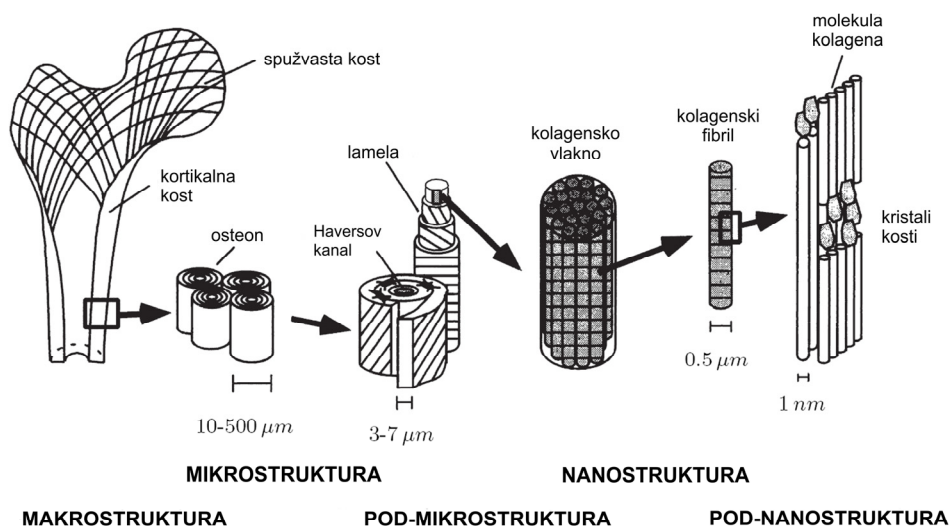
Kako bi razumjeli mehaničko ponašanje koštanoga tkiva kao materijala važno je razumjeti mehaničko ponašanje njegovih sastavnih strukturnih faza na različitim razinama u hijerarhijskoj strukturnoj organizaciji koštanoga tkiva. Te razine i pripadne strukture su prema [20]:

- *makrostruktura*: kortikalno i spužvasto koštano tkivo,
- *mikrostruktura* (od 10 do 500 μm): Haversov sustav (osteon), trabeculae,
- *pod-mikrostruktura* (1-10 μm): lamele,
- *nanostruktura* (od nekoliko stotina nanometara do 1 μm): kolagenski fibril i ugrađeni minerali,
- *pod-nanostruktura* (ispod nekoliko stotina nanometara): molekularna struktura sastavnih elemenata, kao što su minerali, kolagen i ne kolagenski organski proteini.

Ovakva hijerarhijska struktura koštanoga tkiva ima nepravilan raspored i orijentaciju komponenti, čineći materijal koštanoga tkiva heterogenim i anizotropnim. Na slici 3 prikazana je hijerarhijska struktura koštanoga tkiva. Mehaničke karakteristike koštanoga tkiva variraju o strukturnoj razini. Na primjer, modul elastičnosti mokrog uzoraka ljudske kortikalne kosti opterećenog vlačno je na makrostrukturnoj razini 14-20 GPa, dok je na

mikrostrukturnoj razini 5,4 GPa. Modul elastičnosti lamelnog osteona mjenenog na suhom uzorku na nano razini je oko 22 GPa [20].

Još uvijek nije dovoljno razjašnjeno kako hijerarhijska struktura i mehanička svojstva na različitim razinama građe koštanoga tkiva utječu na njegovo ukupno mehaničko ponašanje [6].



Slika 3. Hijerarhijska struktura koštanoga tkiva [20]

Koštano tkivo grade koštana matrica i koštane stanice. Koštana matrica dijeli se na organsku komponentu u kojoj je dominantan kolagen (tip I), te anorgansku komponentu sačinjenu od kristala koji su uloženi u niti između kolagena. Kolagen je odgovoran za elastičnost i fleksibilnost kosti na djelovanje vlačnih sila, dok anorganska matrica daje kosti krutost i tvrdoću kako bi izdržala djelovanje tlačnih sila. Različita raspodjela organske i anorganske matrice u trabekularnom i kortikalnom koštanom tkivu rezultira i različitim svojstvima ova dva tipa kosti [1] i [75]. Dokazano je da je za normalnu funkciju kosti potrebna prisutnost i minerala i organske matrice. Odsustvom jednog od elemenata dobijemo ili mekanu, elastičnu kost ili tvrdu, lako lomljivu kost. U oba slučaja nije postignuta normalna koštana funkcija [76].

2.1.1. Makrostruktura

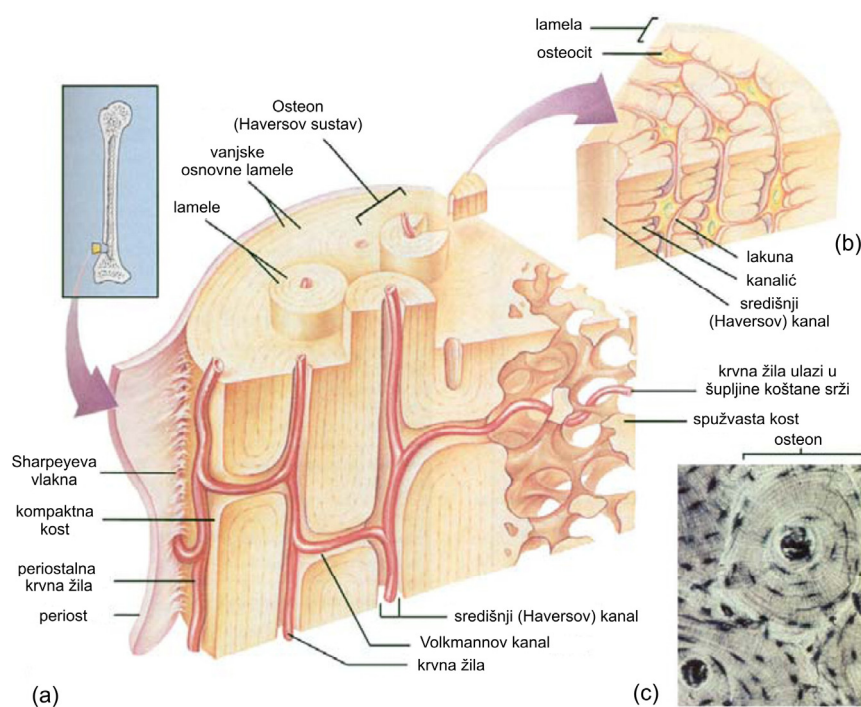
Makroskopski razlikujemo dva glavna tipa kosti (slika 1): kortikalnu (kompaktnu) i spongiozno-trabekularnu (spužvastu). Iako su ta dva tipa kosti nastale iz istih stanica i istih elemenata matrice razlike između njih su strukturne i funkcionalne. Strukturna razlika postoji u količini kalcificirane kosti: 80-90 % kortikalne kosti je kalcificirano, dok je kod

trabekularne kosti kalcificirano svega 15-25 %, ostatak volumena čini koštana srž. Bitno je naglasiti da se 70-80 % međudjelovanja s mekim tkivima obavlja s unutarnje površine kosti.

2.1.2. Mikrostruktura kortikalnoga koštanoga tkiva

Kortikalna kost je gusta i sastoji se od sustava koncentričnih koštanih lamela, oko kanala kroz koje prolaze vezane krvne žile, živci i rahlo vezivo bogato kapilarama. Cijeli sustav naziva se Haversov sustav ili osteon. Osteoni predstavljaju cilindrične strukture s koncentričnim lamelama, a u dijafizama dugih kostiju su orijentirani u uzdužnom smjeru kosti. Postoji različit stupanj mineralizacije između pojedinih osteona. Najniža je u mladim osteonima, a povećava se s dobi te u starosti opet pada. Mikroskopska struktura kortikalnog koštanog tkiva prikazana je na slici 4a. Slikom 4b dan je presjek kroz Haversov sustav, dok se na slici 4c može vidjeti fotomikrografski prikaz Haversovog sustava. Granicu svakog Haversovog sustava čini istaložena amorfnna, cementna tvar, izgrađena od mineralizirane matrice s malo kolagenih vlakana.

Trabekularna kost izgleda kao trodimenzijska rešetka sastavljena od koštanih gredica i stupića unutar kortikalne ljuštore. Mikroskopski gledane obje vrste kosti unatoč različitom izgledu imaju jednaku histološku građu.



Slika 4. Mikrostruktura kortikalnoga koštanoga tkiva [5] (a) skica kortikalne kosti, (b) presjek kroz Haversov sustav i (c) fotomikrografski prikaz Haversovog sustava

U kortikalnoj kosti (npr. dijafize dugih kostiju) lamele su pravilno raspoređene u Haversove sustave (osteone). Razlikujemo vanjske, unutrašnje i prijelazne lamele (slika 4a). Budući da je osnovna funkcija osteona donošenje hranjivih tvari kortikalnoj kosti, razumljivo je da tih sustava nema u spužvastoj kosti, nego tamo hranjive tvari difundiraju u koštano tkivo iz okolnih krvnih kapilara. Osteon je dugačak cilindar, često podijeljen u dvije grane, postavljen paralelno s uzdužnom osi dijafize. Sastoji se od središnjeg Haversovog kanala, koji je okružen s 4-20 koncentričnih lamela. Haversovi kanali povezani su s koštanom srži, periostom te jedan s drugim poprečnim ili kosim Volkmannovim kanalima. Volkmannove kanale ne okružuju koncentrične lamele, nego oni kroz njih prolaze. Svi krvožilni kanali u koštanom sustavu nastaju odlaganjem matrice oko arterijskih i venskih žila. Tok kolagenih vlakana unutar svake lamele je usporedan i teče spiralno. Tok spirale je u susjednim lamelama različito usmjeren, tako da se vlakna susjednih lamela, u svakoj točki sijeku približno pod pravim kutovima. Veliki broj lamela s različito usmjerenim vlaknima, daje kosti čvrstoću unatoč njezinoj maloj masi. Promjer Haversovih kanala vrlo je različit. Svaki osteon nastaje uzastopnim odlaganjem lamela počevši od periferije prema središtu tako da mlađi osteoni imaju šire kanale. U dovršenim osteonima, lamela koja je nastala posljednja nalazi se najbliže središnjem Haversovom kanalu (vidi sliku 6b). Prostore između osteona ispunjavaju trokutaste i nepravilno oblikovane skupine paralelnih lamela koje se nazivaju prijelazne ili intersticijske lamele. One su ostaci osteona razgrađenih tijekom rasta i pregradnje kosti [76].

Postoje dvije koštane površine: vanjska ili periostalna i unutarnja ili endostalna. Periostalna površina je ona površina kojom je kost u dodiru s mekim tkivima, dok endostalna površina je ona površina kojom je kost u dodiru s koštanom srži što je prikazano na slici 5. Obje površine su odijeljene slojem osteogenih stanica koje se zovu periost i endost [76, 77].



Slika 5. Periostalna i endostalna površina ljudske kosti [78]

Periost (pokosnica) se sastoji od vanjskog sloja kolagenih vlakana koja iz periosta prodiru u koštano matricu i povezuju periost s kosti nazivaju se Sharpeyeva vlakna (slika 4a).

Unutrašnji sloj periosta sadržava puno spljoštenih (pokrovnih) stanica, koje se mogu dijeliti i diferencirati u osteoblaste. Endost prekriva sve unutrašnje površine šupljina u kosti, a izgrađuje ga jedan sloj spljoštenih koštanih prastanica s vrlo malo vezivnog tkiva, puno je tanji od periosta. Glavne funkcije periosta i endosta su prehrana koštanog tkiva, stvaranje koštane srži iz koje se stvaraju eritrociti i trajna opskrba novim osteoblastima, koji su potrebni za koštanu pregradnju [76], koja će biti pojašnjena u slijedećem odlomku.

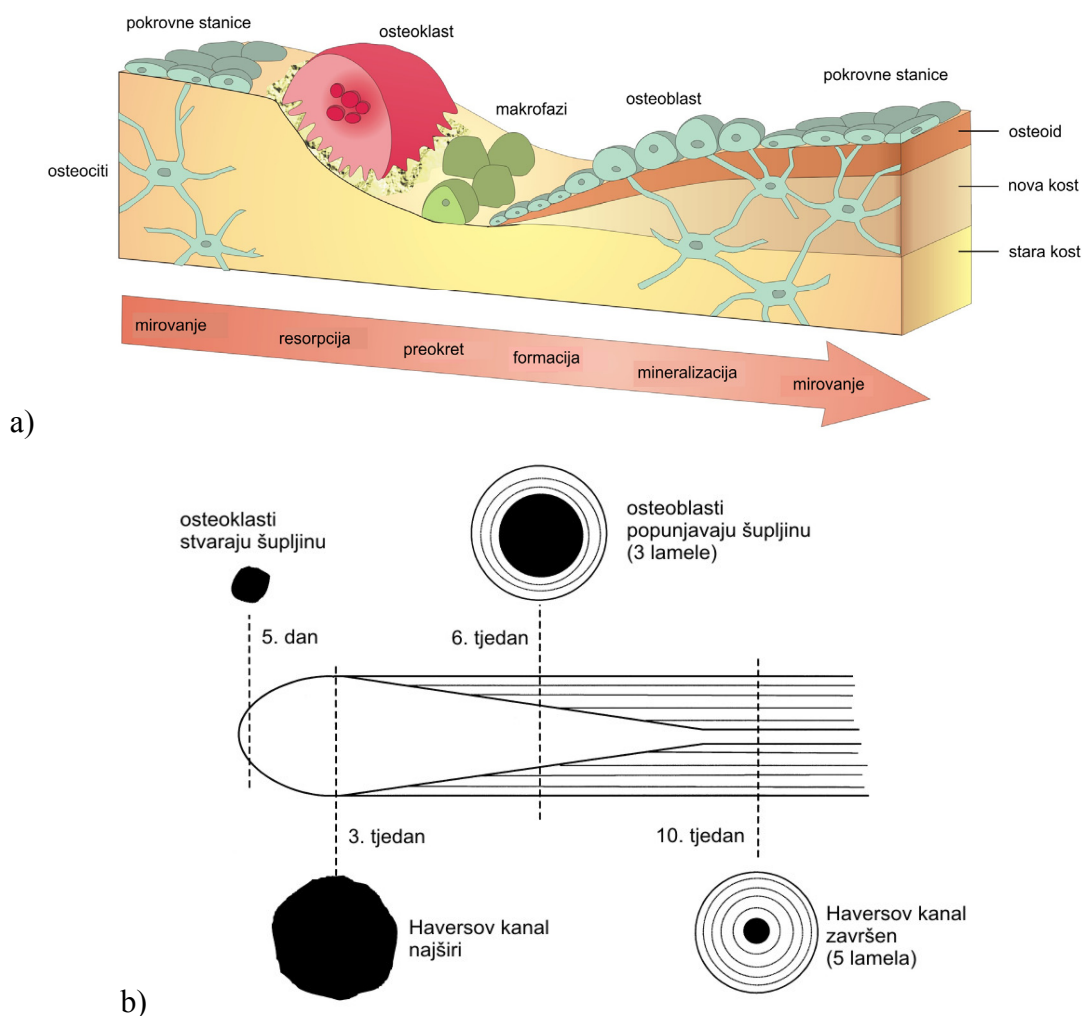
2.2. Koštana pregradnja

Kost ima sposobnost promjene strukture i morfologije kao odgovor na promjene u okruženju uslijed mehaničkog opterećenja. Koštana pregradnja (*bone remodelling*) je jedinstven, povezan i koordiniran proces gdje se na istom području odvija i proces razgradnje i izgradnje. Na taj način omogućuje se održavanje kvalitete kosti te adaptacija strukture kosti na promjene koje nastaju tijekom mehaničkih opterećenja. Koštano tkivo mijenja svoju strukturu ovisno o potrebama koje nameće tjelesna aktivnost i uobičajeni položaj tijela. Proces pregradnje kosti osigurava funkcionalnu cjelovitost koštanog tkiva, a važan je i za njegovu metaboličku ulogu [79]. Koštana pregradnja omogućuje uklanjanje mikrooštećenja u kostima [76]. Pregradnja kosti je proces koji čuva mehanički integritet kosti i odvija se cijeloga života. Naš kostur podliježe velikim naporima tokom života i upravo pregradnjom se kosti učvršćuju i izgrađuju. Koštana pregradnja regulirana je hormonskim, nutritivnim, metaboličkim i mehaničkim čimbenicima, a regulacija se odvija u komunikaciji osteoblasta i osteoklasta [1].

Koštana pregradnja odvija se uglavnom na endostalnoj koštanoj površini [76]. H. Frost je prvi dao detaljan opis slijeda događanja tijekom pregradnje i nazvao to Aktivacijsko – resorpcijsko – formacijska jedinica (ARF). Proces koštane pregradnje prikazan je na slici 6. U koštanom tkivu nalaze se i četiri tipa koštanih stanica: osteoklasti, osteoblasti, osteociti i pokrovne (spljoštene) stanice [4].

Osteoklasti su koštane stanice smještene na koštanoj površini i odgovorne za koštanu resorpciju. To su velike multinuklearne stanice s puno jezgara (4-29), vrlo su pokretne stanice i imaju puno izdanaka. Osteoklasti se priljube uz površinu kosti i otpuštajući jedan enzim započinju razgradnju kosti. Na taj način nastaju male udubine na površini kosti. Kroz fazu preokreta osteoklasti nestaju i stanice makrofaga (slika 6a) mogu se vidjeti na površini kosti. Makrofazi otpuštaju faktor koji sprječava osteoklaste, a stimuliraju osteoblaste [75].

Osteoblasti su stanice koje služe za formiranje kosti, sintetiziraju organske sastojke koštane međustanične tvari, a i nužni su i za ugrađivanje anorganskih sastojaka u matricu. Osteoblasti su odgovorni za izgradnju kosti i oni svoju zadaću obavljaju na mjestu malih udubina (koje se napravili osteoklasti) na površini kosti gdje je kost razgrađena. Osteoblasti ispunjavaju udubinu s kolagenom (mreža vlakna ispunjena proteinima i mineralima iz krvi). Uvijek su smješteni na površinama koštanog tkiva koje još nije kalcificiralo, poredani u nizu poput stanica jednoslojnog epitela. Kada se osteoblast potpuno okruži tek izlučenom matricom postaje osteocit ili pokrovna stanica. Osteoblasti su glavni pokazatelji koštane izgradnje.



Slika 6. Proces koštane pregradnje: a) općenito [80], b) Haversovog kanala (sekundarnog osteona) [81]

Osteociti se nalaze duboko ukopani u kosti u malim osteocitnim lakunama (slika 4b) između lamela matrice čineći mrežu sličnu neuralnoj, koja je odgovorna za prenošenje signala kroz kanaliće do stanične površine tijekom mehaničkog opterećenja kosti [76]. Osteociti i pokrovne stanice nastaju iz osteoblasta. Osteociti nemaju sposobnost lučenja matrice dok

zaostale površinske stanice tj. pokrovne (spljoštene) stanice mogu oslobađati enzime koji razgrađuju tanku zonu kosti dovoljnu da dozvoli osteoklastima koštanu resorpciju, koja joj je funkcija [1].

Pokrovne (spljoštene) stanice su osteoblasti koji nisu ukopani u novoj kosti. One ostaju na površini kada prestane stvaranje kosti i mogu biti ponovno aktivirani kao odgovor na kemijski i/ili mehanički stimulativni podražaj [4].

Aktivnost osteoklasta i osteoblasta u procesu pregradnje kosti kontrolirana je hormonima i drugim tvarima koje prenose informacije. Takav proces pregradnje završava odlaganjem minerala u novostvorenu kost. To nazivamo mineralizacijom. Pritom postoji uravnoteženost između razgradnje i izgradnje kosti. U mlađih ljudi kosti se više izgrađuju, dok se kod starijih ljudi više razgrađuju, što dovodi do osteoporoze [75]. Na slici 6b prikazan je proces formiranja Haversovog kanala (sekundarnog osteona) ispunjavanjem s lamelama unutar osteona [81].

2.3. Mehaničke karakteristike kortikalnoga koštanoga tkiva

Pošto je materijal koštanoga tkiva hijerarhijski strukturiran i mijenja se ovisno o hijerarhijskoj razini, njegova struktura i mehanička svojstva mogu varirati od jednog do drugog položaja te su u funkciji položaja i orijentacije [82]. Mehanička svojstva također ovise o gustoći i mineralnom sastavu te su odraz brzine deformiranja. Mehanički gledano kost je kompozitni materijal s više različitih čvrstih i tekućih faza [83]. Na taj način je struktura koštanoga tkiva kompleksna, višefazna, heterogena i anizotropna [5]. Osim toga, tijekom života mehaničke karakteristike koštanoga tkiva nisu konstantne, one se stalno mijenjaju s vanjskim mehaničkim utjecajima, starošću, prehranom i drugim faktorima [4]. Kao što je ranije rečeno, na makroskopskoj razini, kost je podijeljena na kortikalnu i spužvastu kost. Istraživanja provedena u ovom radu odnose se na makroskopsku analizu kortikalnoga koštanoga tkiva.

Currey [84] navodi pet važnih mehaničkih svojstava na koje prirodna selekcija može utjecati. Prva je *krutost* koja se izravno odnosi na elastično ponašanje koštanoga tkiva. Druga je *otpornost* ili sposobnost apsorpiranja energije iznad granice elastičnosti, odnosno naprezanja kod kojeg nastupa akumuliranje oštećenja pa sve do krajnjeg loma kosti. Unutar tog raspona kost se neće slomiti, ali će se u kosti akumulirati oštećenje, što dovodi do smanjenja krutosti i trajnih deformacija. Treće je *kvizistatička čvrstoća*, koja se može odrediti

vlačnim i tlačnim standardnim ispitivanjima. Četvrto svojstvo koje je direktno povezano s drugim je *lomna žilavost* ili sposobnost da se spriječi nastanak i širenje pukotina. Peta je *otpornost na zamor*, što je posebno važno za sve organizme s kostima, jer im kosti omogućuju kretanje.

Opis mehaničkih svojstava kosti koji će biti istaknut u ovom odjeljku preuzet je iz literature i predstavlja rezime istraživane literature. Kako bi što bolje razumjeli mehaničko ponašanje kortikalnoga koštanoga tkiva važno je kombinirati eksperimentalna ispitivanja, jer se za analizu svakog specifičnog ponašanja primjenjuju različiti eksperimenti. Za ispitivanje elastičnih svojstava najčešće se primjenjuje statički vlačni pokus. Za ispitivanje viskoelastičnosti analizira se proces puzanja ili relaksacije, dok se za analizu zamora koriste ciklička ispitivanja. Za praćenje akumuliranja oštećenja primjenjuju se ciklička kvazistatička ispitivanja, cikličko puzanje ili ciklička relaksacija.

Elastično svojstvo kortikalnoga koštanoga tkiva

Kao i za slučaj inženjerskih materijala tako je i elastično svojstvo koštanoga tkiva svojstvo da se potpuno i u vrlo kratkom vremenu vrati u svoj početni oblik nakon rasterećenja opterećenjem koje još uvijek nije prešlo elastičan limit.

Iako je kost viskoelastičan materijal, ona se pri kvazistatičkim mehaničkim ispitivanjima, te ultrazvučnim ispitivanjima pokazuje kao anizotropno, linearno elastično čvrsto tijelo za koje vrijedi Hookeov zakon kao odgovarajuća konstitutivna jednačba [85]. Ova jednačba u tenzorskoj notaciji glasi

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

gdje je σ_{ij} tenzor naprežanja drugog reda, ε_{kl} tenzor deformacije drugog reda i C_{ijkl} tenzor elastičnosti četvrtog reda. Koristeći reduciranu notaciju jednačba (1) može se zapisati kao

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad (2)$$

gdje su C_{ij} koeficijenti krutosti tj. elastične konstante. Inverz od C_{ij} je S_{ij} poznati kao koeficijenti podatljivosti.

Elastična svojstva nekog materijala mogu se razlikovati ovisno o smjeru u kojem se obavlja ispitivanje. Poznato je da ako su svojstva materijala različita u svakom smjeru, materijal je anizotropan i ima 36 različitih elastičnih konstanti [86]. Međutim, ako postoji jedna ravnina u kojoj su elastična svojstva jednaka u svakom smjeru u toj ravnini, materijal je

transverzalno izotropan i ima samo 5 različitih elastičnih konstanti. Konačno, ako nema ovisnosti elastičnih svojstava u smjerovima (potpuna simetrija), materijal tada zovemo izotropnim i imamo samo dvije elastične konstante koje u inženjerskoj terminologiji nazivamo Youngov modul elastičnosti (E) i Poissonov faktor ili omjer (ν).

Koštano tkivo je anizotropan materijal, ali se često opisuje kao ortotropno elastičan materijal. Uzimajući to u obzir tada imamo 3 okomite ravnine elastične simetrije i 9 nezavisnih materijalnih parametara. Tenzor elastičnosti \mathbf{C} koji je u ortotropnom slučaju pozitivno definitan i simetričan ima oblik

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & I & M & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

U brojnim publikacijama u kojima se mogu pronaći elastične konstante kortikalnoga koštanoga tkiva istaknuto je da one ovise o vrsti kosti (*femur* ili *tibia*), položaju na poprečnom presjeku (prednji, stražnji, bočni ili medijalani), te anatomskom mjestu (distalni ili proksimalni). Ovo ponašanje je različito od na primjer ponašanja većine metala, ali je slično ponašanju drva. Pritom je ravnina simetrije okomita na uzdužnu os dugih kostiju.

U tablici 1 prikazane su vrijednosti elastičnih konstanti za ljudsko i goveđe kortikalno koštano tkivo koje su preuzete iz literature. Ovdje indeks 1 označava osni smjer (aksijalni, longitudinalni), 2 transverzalni (poprečni), a 3 radijalni smjer.

Tablica 1. Elastične konstante za kortikalno koštano tkivo [83]

tip koštanog tkiva:	LJUDSKO		GOVEDE		
	<i>femoral</i>	<i>tibia</i>	<i>femoral</i>	<i>phalanx</i>	<i>femoral</i>
metoda mjerenja:	mehaničko testiranje	mehaničko testiranje	mehaničko testiranje	ultrazvuk	ultrazvuk
pretpostavljena simetrija:	transverz. izotropno	ortotropno	transverz. izotropno	transverz. izotropno	ortotropno
literatura:	Reilly i Burstain (1975)	Knets i Malmeisters (1977)	Reilly i Burstain (1975)	Lang (1970)	Van Buskirk, Cowin i Ward (1981)
E_1 (GPa)	17,0	18,4	22,6	22,0	21,9
E_2 (GPa)	11,5	8,51	10,2	11,3	14,6
E_3 (GPa)	11,5	6,91	10,2	11,3	11,6
G_{12} (GPa)	3,28	4,91	3,6	5,4	6,99
G_{13} (GPa)	3,28	3,56	3,6	5,4	6,29
G_{23} (GPa)	3,6	2,41	3,4	3,8	5,29
ν_{12}	0,46	0,307	0,36	0,396	0,307
ν_{13}	0,46	0,315	0,36	0,396	0,206
ν_{23}	0,58	0,622	0,51	0,484	0,380
ν_{21}	0,31	0,142	0,16	0,203	0,205
ν_{31}	0,31	0,119	0,16	0,203	0,109
ν_{32}	0,58	0,488	0,51	0,484	0,302

Viskoelastično ponašanje kortikalnoga koštanoga tkiva

Ako je ponašanje elastičnog materijala vremenski ovisno, tada za materijal kažemo da je viskoelastičan. Svi biološki materijali pokazuju barem malo viskoelastičnosti. Ovisnost promjene deformacije s vremenom pri konstantnom opterećenju istražuju [30, 31].

Viskozni dio mehaničkog ponašanja kosti odgovoran je za ovisnost krutosti o brzini deformacije, sposobnosti trošenja energije u elastičnom području deformacije te za pojave kao što su relaksacija naprezanja i puzanje.

Neke karakteristike viskoelastičnog ponašanja su [34]:

- ako se opterećenje drži konstantnim (naprezanje je konstantno), deformacija se povećava s vremenom (puzanje),
- ako se deformacija drži konstantnom, naprezanje opada s vremenom (relaksacija),
- efektivna krutost ovisi o brzini primijenjenog opterećenja,
- ako je primijenjeno cikličko opterećenje, pojavljuje se histereza, što dovodi do disipacije mehaničke energije.

Plastično deformiranje kortikalnoga koštanoga tkiva

Plastična deformacija kosti je trajna deformacija koja nakon rasterećenja opterećenog ispitnog uzorka kosti ne iščezava. Prema [25] istezljivost kortikalne kosti iznosi 1,0 – 1,2 %. Iznos plastične deformacije opterećenog uzorka kosti dosta ovisi o načinu na koji se tijekom izrade i ispitivanja uzorak drži vlažnim. Kada je ispitni uzorak prikladno vlažan, krivulja naprezanje-deformacija nakon granice tečenja pokazuje pozitivan prirast, što je prikazano u [25].

Mehanizam nastanka plastične deformacije uslijed vlačnog opterećenja u kostima nije isti onom koji uzrokuje plastične deformacije u metalu. Nastanak plastične deformacije kortikalnoga koštanoga tkiva je u radu [25] opisan kao lom veza između molekula na paralelnim ravninama u pravcu opterećenja.

2.4. Mehanički i biološki faktori pri eksperimentalnom istraživanju

Pri eksperimentalnom istraživanju mehaničkog ponašanja kortikalnog koštanog tkiva treba uzeti u obzir različite mehaničke i biološke faktore. Mehanički faktori koji mogu utjecati na biomehaničko ponašanje su sljedeći [66]:

- vrsta ispitivanja,
- brzina opterećivanja ili brzina deformiranja,
- učestalost skeniranja impulsa ili vibracije u nerazornim ispitivanjima,
- trajanje opterećenja,
- orijentacija uzorka s obzirom na os simetrije materijala,
- oblik i veličina uzorka,
- uvjeti površinske obrade uzorka,
- temperatura i vlaga i uzorka i okruženja za vrijeme eksperimenta.

U stvari svi ovi faktori trebaju biti uzeti u obzir pri ispitivanju materijala. Biološki faktori su specifični za svako biološko tkivo pa tako i koštano tkivo. Ovdje će biti spomenuti samo sljedeći faktori [66]:

- rasa, spol i dob osobe ili životinje,

- stupanj aktivnosti fiziološke funkcije u biološkom tkivu,
- oblik i stupanj patološke promjene u tkivu,
- trajanje i uvjeti čuvanja i koštanog tkiva i uzoraka koji su načinjeni od njih do eksperimenta,
- lociranje kosti u tijelu te uzorka koštanog tkiva u odgovarajućoj kosti.

Samo poznavanje svih faktora daje mogućnost za pouzdanu procjenu eksperimentalnih podataka te njihovu usporedivost s podacima drugih istraživača.

2.5. Konstitutivni model koštanoga tkiva

Razni su načini formuliranja konstitutivnog modela kortikalnog koštanoga tkiva. Pošto je struktura koštanog tkiva složenija nego u većine inženjerskih kompozita, neki od autora formuliraju ga kao kompozitni materijal, što je čest slučaj u literaturi kako predvidjeti ukupna mehanička svojstva. Poneki autori formuliraju ga kao model u mikroravnini te kao specifičan model.

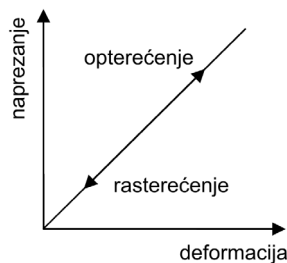
Kako god ga formulirali, konstitutivan model kortikalnoga koštanoga tkiva treba zadovoljiti 4 osnovna uvjeta ([5]):

1. treba biti baziran na jednostavnim mehaničkim modelima i formuliran s termodinamičkom pozadinom,
2. trebao bi sa zadovoljavajućom točnošću ponoviti široki uzorak eksperimentalnih zapisa,
3. parametri materijala konstitutivnog modela trebaju biti određeni na osnovu eksperimentalnih istraživanja,
4. trebao bi biti prikladan za numeričku implementaciju.

U ovom radu će konstitutivan model biti formuliran na makrorazini u okvirima mehanike oštećenja i termodinamike kontinuuma.

3. PREGLED MATERIJALNIH MODELA

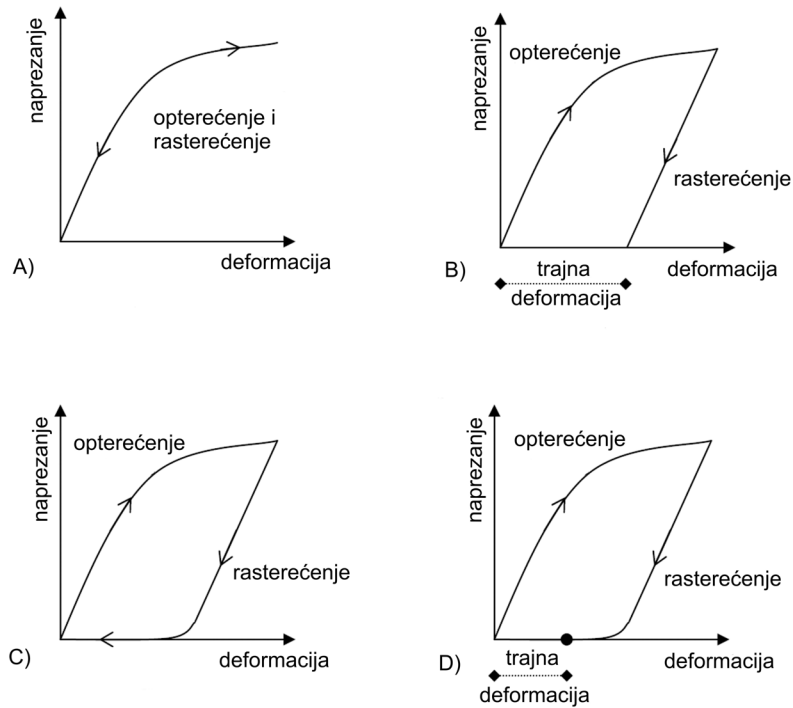
Reološka identifikacija materijala često uključuje osno opterećenje ispitnog uzorka standardne geometrije i identifikaciju nelinearnog ponašanja materijala analizirajući dijagrame ovisnosti naprezanja o deformaciji. Na slici 7 prikazano je ponašanje linearno elastičnog materijala u obliku dijagrama ovisnosti naprezanja o deformaciji.



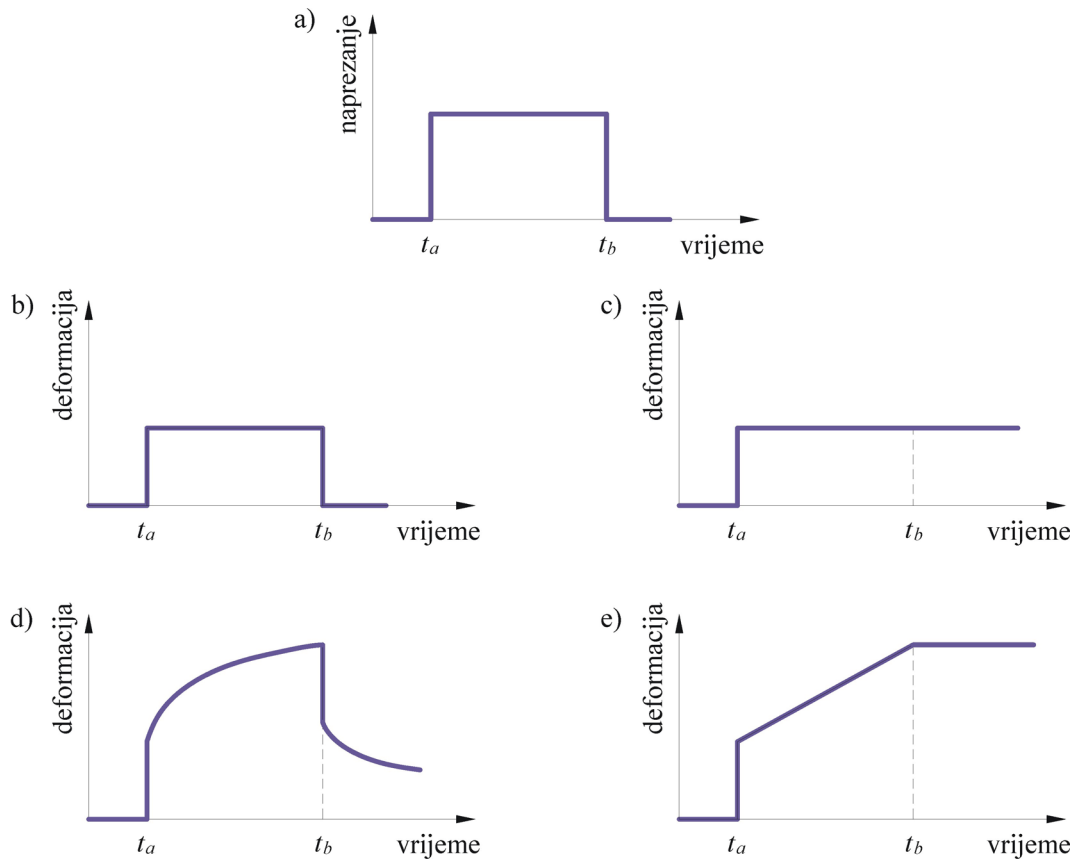
Slika 7. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za linearno elastičan materijal

Slikom 8 dan je prikaz nelinearnih reoloških modela u dijagramima ovisnosti naprezanja o deformaciji, gdje su istaknuti tipični primjeri nelinearnog ponašanja materijala kao što je plastičnost (b), viskoelastičnost (c), te viskoplastičnost (d).

Kada je kortikalno koštano tkivo podvrgnuto vanjskom opterećenju pripadno ponašanje je kombinacija ponašanja elastičnog tijela i viskozne tekućine, tj. pokazuje početna elastična svojstva, nakon kojih slijedi spori i kontinuirani porast deformacije pri konstantnom opterećenju. Prilikom rasterećenja najprije dolazi do elastičnog oporavka, nakon čega slijedi kontinuirano smanjenje deformacije. Ovo ponašanje je poznato kao viskoelastičnost, na koju znatno utječe brzina deformiranja i pripadna naprezanja. Viskoelastične materijale također nazivamo vremenski ovisnim materijalima, jer njihov odgovor na vanjsku uzbuđu varira s vremenom. Slikom 9 uspoređuje se elastičan (b), plastičan (c), viskoelastičan i viskoplastičan (d), te viskozni (e) odgovor materijala u dijagramu ovisnosti deformacije o vremenu na uzbudni dijagram puzanja (a) prikazan u dijagramu ovisnosti naprezanja o vremenu.



Slika 8. Dijagrami ovisnosti naprezanja o deformaciji za nelinearno elastičan (a), plastičan (b), viskoelastičan (c) i viskoplastičan (d) materijal [87]

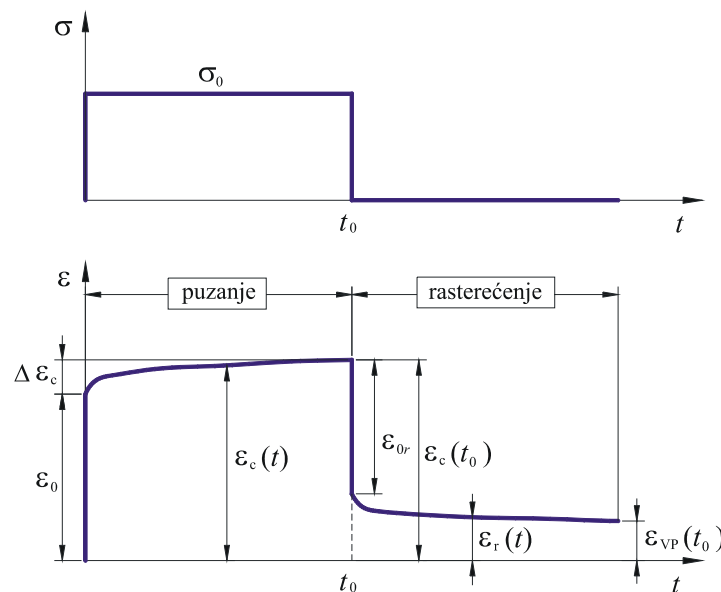


Slika 9. Ponašanje materijala u uvjetima puzanja: a) krivulja naprezanja u ovisnosti o vremenu – naprezanje je konstantno i različito od nule od trenutka t_a do t_b , b) elastično ponašanje, c) plastično ponašanje, d) viskoelastično i viskoplastično ponašanje i e) viskozno ponašanje.

Kao što je rečeno, viskoelastični materijali imaju svojstva elastičnih tijela i viskoznih tekućina, a karakteriziraju ih pojave puzanja i relaksacije. Puzanje je pojava porasta deformacija tijekom vremena pri konstantnom naprezanju, dok je relaksacija pojava opadanja naprezanja kod konstantne deformacije tijekom vremena.

Za opisivanje viskoelastičnog ponašanja materijala koriste se konstitutivni zakoni koji uz varijable naprezanja i deformacije uključuju i vrijeme kao varijablu. Pritom oblik krivulje deformacija-vrijeme čak i za slučaj jednoosnog opterećenja kao što je jednoosno puzanje može biti dosta kompleksan.

Vremenski ovisno ponašanje kortikalne kosti bit će razmatrano provođenjem eksperimenata puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Proces puzanja je spora i kontinuirana deformacija materijala pod konstantnim opterećenjem. Za razliku od metala, kortikalno koštano tkivo, kao i polimeri te neki kompoziti, počinju puzati i na sobnoj temperaturi. Slikom 10 shematski je prikazan proces puzanja i naknadnog rasterećenja s uzbudnom funkcijom u dijagramu ovisnosti naprezanja o vremenu i odzivnom funkcijom u dijagramu ovisnosti deformacije o vremenu. U odzivnom dijagramu na slici 10 ε_0 je elastična deformacija pri opterećenju, ε_{0r} je elastična deformacija pri rasterećenju, $\Delta\varepsilon_c$ je prirast deformacije zbog puzanja, $\varepsilon_c(t_0)$ je ukupna deformacija puzanja u trenutku neposredno prije rasterećenja, $\varepsilon_r(t)$ je deformacija rasterećenja i $\varepsilon_{vp}(t_0)$ je trajna viskoplastična deformacija u funkciji vremena provedenog u puzanju.



Slika 10. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja s vremenom (uzbuda) i ovisnosti deformacije s vremenom (odziv) kroz period puzanja i naknadnog rasterećenja

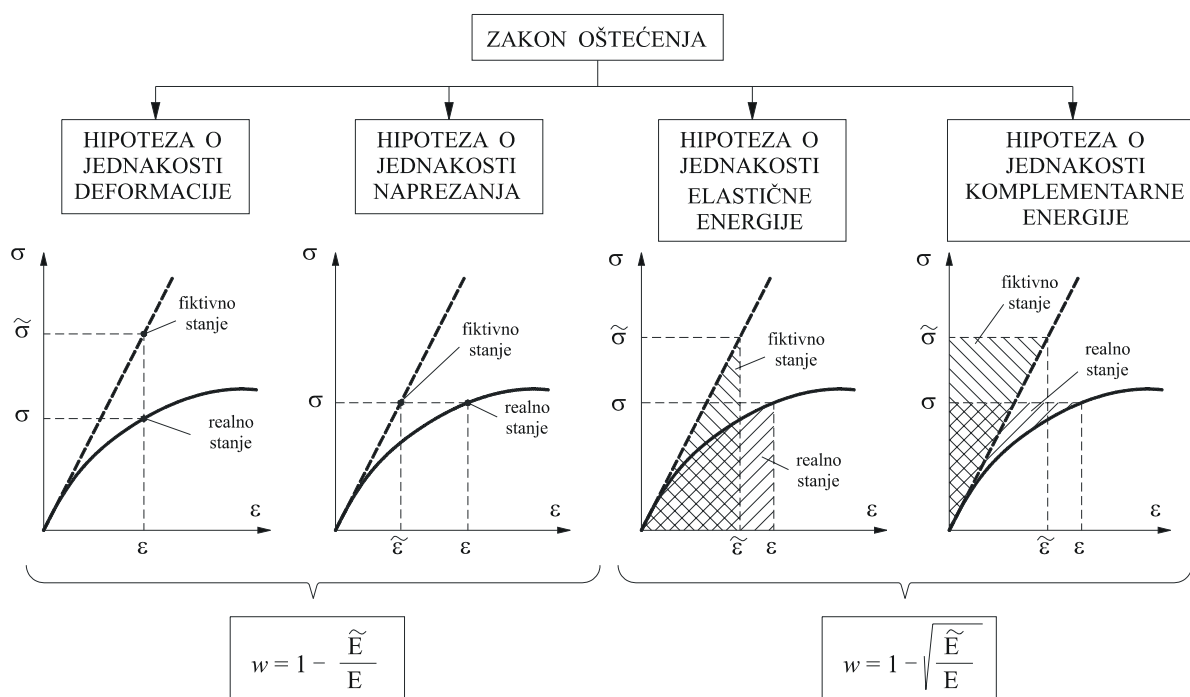
3.1. Model oštećenja

Proces akumuliranja oštećenja u materijalu je progresivan fizikalni proces pri kojem dolazi do pojave loma u materijalu [88]. Kako bi se opisalo postupno ili progresivno smanjenje ili degradacija koju obično doživljavaju mehanička svojstva materijala prije početka pojave makropukotina, korištenje principa mehanike oštećenja (CDM - *Continuum Damage Mechanics*) igralo je važnu ulogu. Mehaniku oštećenja prvi je uveo L.M. Kachanov [89]. On je prvi uveo varijablu koja povezuje gustoću materijala s mikrooštećenjima. U velikom broju publikacija dan je prikaz povjesnog razvoja i temeljnih principa mehanike oštećenja kontinuuma, kao na primjer Chaboche [90], Lemaitre [88, 91], Voyiadjis i Kattan [92, 93]. U modelu mehanike oštećenja kontinuuma oštećenje se razmatra kao makroskopsko stanje varijabli koje utječe na makromehanička svojstva materijala, kao što je degradacija krutosti. Fizikalno gubitak krutosti je posljedica distribuiranih mikropukotina i mikrouključina u materijalu, koje nisu kontinuirane na manjoj skali, no na većoj skali možemo uzeti da jesu. Oštećenje u materijalu može biti predstavljeno u više oblika, kao što su specifične praznine i površinske pukotine, specifične pukotine i volumenske praznine te razmaci između pukotina i uključina. Za opisivanje oštećenja, u mehaniku kontinuiranog medija uvodi se reprezentativni volumenski element (RVE – *Representative Volume Element*) čije se mehaničko ponašanje opisuje homogeniziranim varijablama. Pritom reprezentativni volumenski element egzistira samo ako je razmatrani volumen dovoljno mali da bi se postiglo homogeno stanje makroskopskih naprezanja (na vanjskim plohama RVEa). Istovremeno RVE mora biti dovoljno velik da bi se mogao smatrati statistički homogen. Tri su glavna tipa oštećenja: duktilno oštećenje (*ductile damage*), zamorno oštećenje (*fatigue damage*), te oštećenje pri puzanju (*creep damage*). U ovom radu analizirat će se oštećenje uslijed puzanja materijala.

Stanje oštećenja obično se opisuje tenzorom oštećenja \mathbf{M} . U izotropnom slučaju tenzor oštećenja se reducira na skalarnu varijablu oštećenja w . Pritom je varijabla oštećenja makroskopska mjera mikroskopske degradacije materijala. Tenzor \mathbf{M} sadrži potrebne informacije o stanju oštećenja u materijalnoj točki, odnosno to je mjera iznosa oštećenja.

U ovom radu, radi pojednostavljene analize oštećenja kortikalne kosti razmatrat će se izotropni slučaj, što znači da će samo skalarna varijabla w biti potrebna za opisivanje stanja oštećenja. Pritom je teorijska vrijednost varijable w u rasponu od 0 do 1. Kada je $w = 0$ materijal nije oštećen, dok je za $w = 1$, materijal potpuno oštećen.

Za izotropan slučaj oštećenja dijagramom na slici 11 prikazane su četiri osnovne hipoteze definiranja zakona oštećenja prema [94]. Prva je hipoteza o jednakosti deformacije, druga hipoteza o jednakosti naprezanja, zatim slijede hipoteza o jednakosti elastične energije te hipoteza o jednakosti komplementarne energije. Na taj način imamo dva pristupa definiranja varijable oštećenja. Hipoteza o jednakosti deformacije i hipoteza o jednakosti naprezanja daju jedan pristup definiranju varijable oštećenja, dok hipoteza o jednakosti elastične energije i hipoteza o jednakosti komplementarne energije daju drugi pristup. Na slici 11 E predstavlja Youngov modul elastičnosti neoštećenog materijala, dok \tilde{E} predstavlja efektivni modul elastičnosti oštećenog materijala. U ovom radu zakon oštećenja definiran je prema hipotezi o jednakosti deformacije.

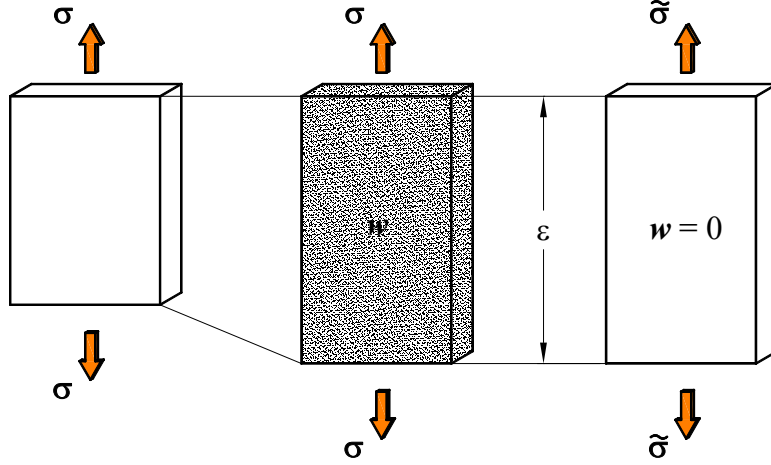


Slika 11. Hipoteze definiranja zakona oštećenja.

Koncept efektivne krutosti koji se bazira na principu jednakosti deformacije uveli su Lemaitre i Chaboche 1975. godine. Taj se koncept zove koncept efektivnog naprezanja, gdje je efektivno naprezanje $\tilde{\sigma}$ predstavlja ono naprezanje koje bi u idealiziranom materijalu bez oštećenja uzrokovalo deformacije istog iznosa kao što bi to izazvalo stvarno naprezanje σ u oštećenom materijalu. Time se takav neoštećeni element opterećen efektivnim naprežanjem deformira na isti način (isti iznos deformacije) kao i oštećeni element podvrgnut stvarnim naprežanjem. Koncept efektivnog naprežanja pri jednoosnom stanju naprežanja predstavljen je slikom 12, dok su efektivno i stvarno naprežanje povezani relacijom

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - w(t)}, \quad (4)$$

gdje je $\tilde{\sigma}$ efektivno naprezanje, σ je Cauchyovo naprezanje, a $w(t)$ je varijabla oštećenja ovisna o vremenu.



Slika 12. Izotropno oštećenje pri jednoosnom stanju naprezanja (koncept efektivnog naprezanja) [34].

Efektivno naprezanje koristi se u konstitutivnim zakonima u zamjenu za Cauchyovo naprezanje kako bi se opisao utjecaj oštećenja na ponašanje materijala na razini makrostrukture.

Uzimajući sada konstitutivnu jednadžbu $\tilde{\sigma} = \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$, gdje se \mathbf{C}_0 odnosi na krutost neoštećenog materijala, može se jednostavno dobiti relacija naprezanje-deformacija oštećenog materijala, jer su realna i efektivna deformacija pretpostavljene kao jednake

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - w(t)] \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

gdje je \mathbf{C} trenutni tenzor krutosti materijala.

Koncept efektivnog naprezanja igra važnu ulogu u definiranju prikladne varijable oštećenja. Teoriju anizotropne mehanike oštećenja razvili su između ostalih Voyiadjis i Kattan [92, 93], čija literatura je pomogla u pisanju ovog pregleda.

U literaturi se uobičajeno proširivanje jednodimenzijskog modela na ortotropni trodimenzijski model oštećenja, provodi na način da je tenzor oštećenja \mathbf{M} definiran s tri skalarne varijable oštećenja koje odgovaraju glavnim osima materijala u obliku

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left[\frac{1}{1 - w_1}, \frac{1}{1 - w_2}, \frac{1}{1 - w_3}, \frac{1}{\sqrt{(1 - w_2)(1 - w_3)}}, \frac{1}{\sqrt{(1 - w_3)(1 - w_1)}}, \frac{1}{\sqrt{(1 - w_1)(1 - w_2)}} \right]. \quad (6)$$

Ovaj oblik tenzora oštećenja je predložio Chaboche [90], a koristi ga Bredbenner i Davy [50]. Bredbenner i Davy [50] koriste tenzor oštećenja \mathbf{M} koji se temelji na jednakosti energija tako da se tenzor efektivne podatljivosti može zapisati u obliku

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{M} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{M}, \quad (7)$$

a tenzor efektivne krutosti kao

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C} : \mathbf{M}^{-1}. \quad (8)$$

3.2. Model oštećenja pri puzanju

Za slučaj puzanja u literaturi se najčešće primjenjuje model oštećenja poznat kao Kachanov model [89]

$$\dot{w} = \left[\frac{\langle \sigma - \sigma_{th}^D \rangle}{C(1-w)} \right]^r, \quad (9)$$

gdje su C i r parametri materijala, σ_{th}^D je granična vrijednost naprezanja (*threshold stress*) kod koje počinje akumuliranje oštećenja u materijalu. Vrijednost u uglatoj zagradi, McAulayova zagrada, ima značenje da iščezava, ako je izraz u zagradi manji od nule. Prema tome, ovaj model omogućuje opisivanje akumuliranja oštećenja u materijalu koji je linearno viskoelastičan, ako je naprezanje manje od graničnog ($\sigma < \sigma_{th}^D$) te nelinearno viskoelastičan, ako je naprezanje veće od graničnog ($\sigma > \sigma_{th}^D$) tada se u materijalu uz viskoelastičnost počinje akumulirati oštećenje. Upravo na opisani način ponaša se kortikalna kost.

Za analizu puzanja kada je $\sigma > \sigma_{th}^D$ rješenje jednadžbe (9) korištenjem početnih uvjeta $w = w_0$ i $t = 0$ glasi

$$\frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-w_0} \left[1 - \frac{t}{t_c} \right]^{-\frac{1}{1+r}}, \quad (10)$$

gdje je t_c konstanta normalizacije prikazana izrazom

$$t_c = \frac{(1-w_0)^{r+1}}{1+r} \left[\frac{C}{\langle \sigma - \sigma_{th}^D \rangle} \right]^r. \quad (11)$$

Primjenjujući uvjet u trenutku loma ($t = t_F$ i $w = w_F$) i uvrštavajući ga u jednadžbu (10) dobivamo izraz za vrijeme do loma

$$t_F = \frac{(1 - w_0)^{1+r} - (1 - w_F)^{1+r}}{1+r} \left[\frac{C}{\langle \sigma - \sigma_{th}^D \rangle} \right]^r. \quad (12)$$

Jednadžba (12), koristit će nam za određivanje parametara oštećenja materijala za slučaj eksperimenta puzanja materijala do loma.

Trenutno oštećenje w_0 koje nastaje brzom primjenom opterećenja na željenu razinu naprezanja σ lako se može doznati iz poznate formule (13) koju je predložio Kachanov [89]. Prema njegovom izrazu omjer podatljivosti prilikom rasterećenja (J_d) i početne podatljivosti prilikom opterećenja (J_0) daje mjeru stupnja oštećenja koji je prikazan jednadžbom

$$\frac{1}{1 - w_0} = \frac{J_d}{J_0}. \quad (13)$$

Na taj je način moguće odrediti naprezanje pri kojem se počinje akumulirati oštećenje, a pri tom naprezanju w_0 ima određenu vrijednost. Nakon toga iz jednadžbe (12) određuju se preostali parametri oštećenja materijala C , r i w_F .

3.3. Model viskoelastičnosti

Podatljivost materijala za slučaj puzanja moguće je zapisati kao zbroj trenutne J_0 i vremenski ovisne komponente $\Delta J(t)$, što se može prikazati izrazom

$$J(t) = J_0 + \Delta J(t). \quad (14)$$

Vremenski ovisna komponenta ($\Delta J(t)$) pri modeliranju viskoelastičnosti može se prikazati u obliku prema [65]

$$\Delta J(t) = J_1 t^\gamma, \quad (\text{Power law}), \quad (15)$$

$$\text{ili} \quad \Delta J(t) = \sum_{i=1}^N J_i \left(1 - e^{-t/\tau_i} \right), \quad (\text{Prony serija}). \quad (16)$$

Primjena oba zakona uobičajena je za modeliranje procesa puzanja, iako se "Prony serija" više primjenjuje za slučaj numeričkog modeliranja procesa puzanja, primjenom npr. metode konačnih elemenata (MKE).

Dasappa je sa suradnicima [62, 95], promatrajući puzanje vlaknastog GMT (*glass mat thermoplastic*) kompozita, napravio usporedbu ovih dvaju zakona za vremenski promjenjivu podatljivost puzanja. Zaključio je da "*Prony* serija" daje točnije rezultate za vremenski dugotrajno puzanje. Pošto se u ovom istraživanju promatra kratko vrijeme puzanja kosti dovoljno je uzeti "*Power law*" model vremenski ovisne komponente podatljivosti predstavljen jednažbom (15).

3.4. Model viskoplastičnosti

Jedan od najčešćih matematičkih modela za opisivanje viskoplastičnih deformacija nastalih tijekom puzanja je Zapas-Crissmanov model [55]. Tuttle sa suradnicima [56] je predložio opisivanje viskoplastične deformacije s ovim modelom, a koriste ga i Marklund sa suradnicima [60, 61], Dassapa sa suradnicima [62, 63], Boyd sa suradnicima [64] i mnogi drugi. Relacija za viskoplastičnu deformaciju koju su predložili Zapas i Crissman ima oblik

$$\varepsilon_{VP} = \alpha \left\{ \int_0^t h[\sigma(\eta)] d\eta \right\}, \quad (17)$$

gdje je $\alpha()$ funkcija (funkcional) koja ovisi o povijesti naprežanja $\sigma(\eta)$ u vremenu η .

Za pojedinačni korak puzanja pri konstantnom opterećenju, viskoplastična deformacija se može zapisati u obliku

$$\varepsilon_{VP} = \alpha[h(\sigma) \cdot t]. \quad (18)$$

Zapas i Crissman predložili su jednostavniji oblik funkcije (funkcionala) $\alpha()$ na način da je

$$\alpha[h(\sigma) \cdot t] = [h(\sigma) \cdot t]^n. \quad (19)$$

Ako jednažbe (18) i (19) za svaki korak opterećenja uvrstimo u jednažbu (17), te uz uvjet: $h[\sigma(\eta)]$ s $h[0] = 0$ i $h[\sigma(\eta)] = C_{VP}\sigma^m$, izraz (17) nakon integriranja poprima oblik:

$$\varepsilon_{VP} = [C_{VP}(\sigma^m)t]^n, \quad (20)$$

gdje su C_{VP} , m i n parametri materijala. Na taj način je viskoplastična deformacija u Zapas-Crissmanovom modelu modelirana kao nelinearna funkcija naprežanja i vremena.

Opisani model za viskoplastičnu deformaciju u literaturi se uglavnom primjenjuje za analizu inženjerskih materijala, najčešće kompozita. Cilj ovog rada je primijeniti ovaj model na analizu kortikalnoga koštanoga tkiva.

Iz analize Melnisovih eksperimentalnih rezultata [30] te iz vlastitih eksperimentalnih istraživanja koštanog tkiva vidljivo je da se viskoplastične deformacije počinju akumulirati iznad određene granične vrijednosti naprezanja, σ_{th}^{VP} . Na taj način će za slučaj puzanja ($0 < t < t_0$) odnosno rasterećenja ($t > t_0$) model viskoplastičnosti dan jednadžbom (20) za modeliranje ponašanja kortikalne kosti imati oblik

$$(\varepsilon_{VP})_c = A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t^n, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (21)$$

$$(\varepsilon_{VP})_r = A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t_0^n, \quad \text{za } t > t_0, \quad (22)$$

gdje je $C_{VP}^n = A$.

4. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODEL

Za analizu naprezanja i deformacija u deformabilnom tijelu neophodno je poznavanje konstitutivnih jednadžbi materijala. Konstitutivnom jednadžbom definira se odnos između naprezanja i deformacija koji je linearan za slučaj elastične analize (Hookeov zakon) (slika 7), a mnogo je složeniji (slika 8) za slučaj nelinearne analize te analize koja uključuje vrijeme i dodatne unutarnje varijable.

Velik dio istraživanja u posljednjih nekoliko godina u području je modeliranja procesa puzanja s naknadnim rasterećivanjem, budući da jednostavan viskoelastičan model nije uvijek dovoljan za opisivanje dodatnih efekata koji se javljaju u navedenom procesu.

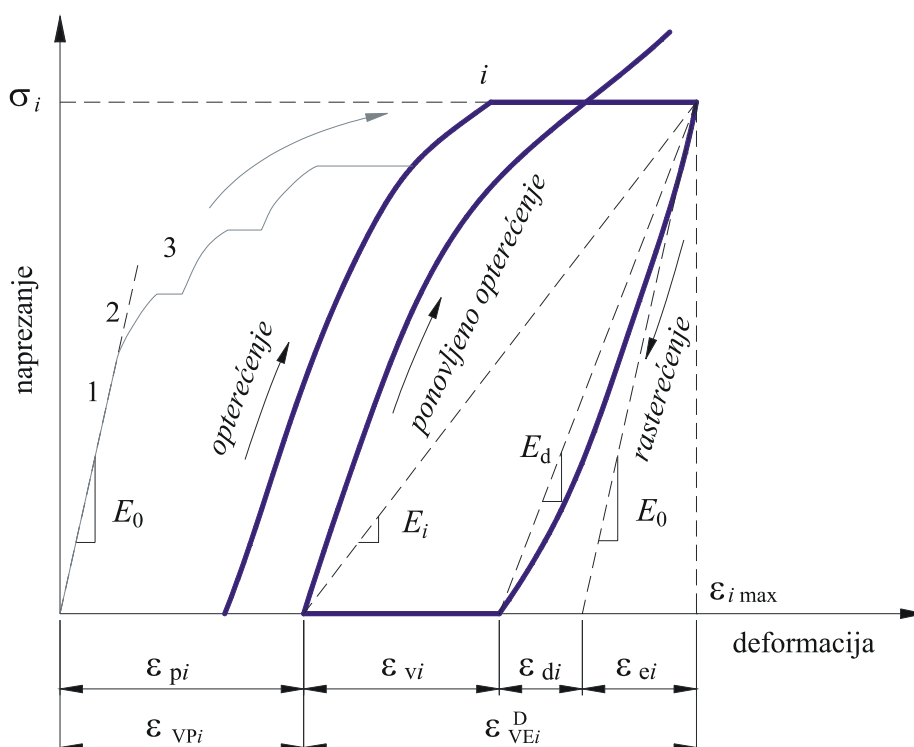
Deformacije u materijalu izazvane puzanjem ne iščezavaju uvijek u potpunosti čak i nakon dovoljno dugog vremenskog razdoblja. Iz tog razloga je u modele viskoelastičnosti potrebno uključiti model viskoplastičnosti, a osim toga i model oštećenja.

Konstitutivni model predložen u ovom radu za opisivanje viskoelastičnog i viskoplastičnog procesa deformiranja kortikalne kosti spregnutog s akumuliranjem oštećenja temelji se na pretpostavci malih deformacija. Razlog tome je što je istezljivost kortikalne kosti do loma vrlo mala (1,0 – 1,2 % [25]). Na taj način se ukupna deformacija puzanja, $\varepsilon(t)$, aditivno rastavlja na viskoelastični dio koji ujedno sadrži deformaciju povezanu s akumuliranjem oštećenja (ε_{VE}^D) te na viskoplastični dio (ε_{VP}), tako da je

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{VE}^D + \varepsilon_{VP}. \quad (23)$$

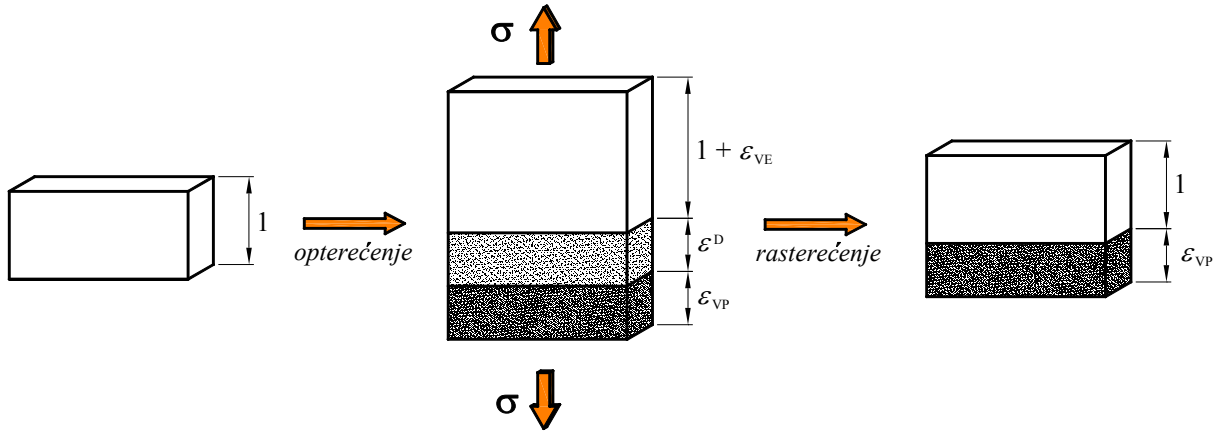
Ovakva dekompozicija ukupne deformacije ilustrativno je prikazana na slici 13, gdje je shematski prikazana ovisnost naprezanja o deformaciji pri cikličkom ispitivanju puzanja i naknadnog rasterećenja za i -ti ciklus opterećenja. Iz rezultata eksperimentalnih istraživanja koji su prikazani u 5. poglavlju rada, vidljivo je da ovakvo ponašanje odgovara goveđoj kortikalnoj kosti, kao i analiziranom kompozitnom materijalu kojeg proizvodi tvrtka SAWBONES [96]. Slikom 13 su također prikazani parametri materijala koje je potrebno odrediti za definiranje modela. Tako je početni modul elastičnosti (E_0), početni nagib u

dijagramu naprezanje-deformacija u linearno elastičnom području. Trenutni modul pri rasterećenju (E_d) određen je kao nagib pravca između dvije točke u istom ciklusu: prva na kraju procesa puzanja trenutak pred rasterećenje, a druga nakon rasterećenja kada opterećenje padne na nulu. Trenutni modul (E_i) određuje se kao nagib pravca između dvije točke u istom ciklusu: prva na kraju procesa puzanja trenutak pred rasterećenje, a druga na kraju procesa rasterećenja točno prije ponovljenog opterećenja. Plastična deformacija (ϵ_p) je trajna deformacija na kraju svakog ciklusa koji se sastoji od: opterećenja – držanja opterećenja – rasterećenja – držanja rasterećenja.



Slika 13. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem kortikalne kosti (po analogiji za i -ti ciklus relaksacije prema [44])

Slika 14 ilustrira osnovnu idejnu pretpostavku dekompozicije kroz uobičajeni jednoosni vlačni pokus. Pri opterećenju nastaju viskoelastična i viskoplastična komponenta deformacije te komponenta deformacije oštećenja, dok pri rasterećenju viskoelastična komponenta i komponenta oštećenja iščezavaju. Ovakav koncept prikazali su Armero i Oller u svojoj publikaciji [97], a koristi ga i Bredbener [49].



Slika 14. Skica jednoosnog vlačnog eksperimenta materijala gdje pri opterećenju nastaje viskoelastična, viskoplastična deformacija te deformacija uslijed oštećenja [49]

Marklund sa suradnicima [60] koristi drugi pristup gdje viskoelastičnu deformaciju zbraja s viskoplastičnom, a zatim taj iznos množi sa skalarnom varijablom oštećenja u obliku

$$\varepsilon(t) = w(t) \cdot (\varepsilon_{VE} + \varepsilon_{VP}). \quad (24)$$

Iznos oštećenja iskazuje kroz degradaciju krutosti materijala koju određuje iz cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem. Primjena konstitutivnog modela kod kojeg je viskoplastična deformacija spregnuta s oštećenjem prema izrazu (24) u ovom radu nije dala dobar rezultat za slučaj modeliranja ponašanja kortikalne goveđe kosti. Za to se pokazala boljom relacija (23).

Radi potpunog razumijevanja izvoda konstitutivnog modela koji je primijenjen u ovom radu za opisivanje ponašanja kortikalnog koštanog tkiva, u tekstu koji slijedi dan je kratki prikaz dobro poznatih zakona i relacija termodinamike kontinuuma [86] i mehanike oštećenja na kojima se model temelji.

4.1. Osnove klasične termodinamike

4.1.1. Prvi zakon termodinamike

Prvi zakon termodinamike nije ništa drugo nego zakon o očuvanju energije. On govori da se energija ne može stvoriti ni iz čega niti se može uništiti, već se samo može prenijeti iz jednog oblika u drugi ili s jednog tijela na drugo. Dan je u obliku

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho \mathbf{r} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{q}}. \quad (25)$$

Porast ukupne energije sustava ($\rho \dot{u}$) jednak je zbroju izvršenog rada nad sustavom ($\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$) i dovedene topline sustavu ($\rho r - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{q}}$). Pri tom se ukupna energija može podijeliti na kinetičku, potencijalnu i unutarnju energiju, a prema potrebi tu ulaze i električna, kemijska i nuklearna energija. U izrazima ovog poglavlja točka iznad veličine označava derivaciju po vremenu.

4.1.2. Drugi zakon termodinamike

Smjer prijenosa energije točno je određen drugim zakonom termodinamike. Poznato je da toplota uvijek prelazi s toplijeg na hladnije tijelo, a isto tako da se mehanička energija pri trenju pretvara u toplotu. Da bi se to opisalo uvodi se pojam entropije (S) koja predstavlja "mjeru nereda" i "slučajnosti" na mikroskopskoj razini. Entropija nekog izoliranog sustava nikada ne pada. Ona ostaje konstantna (reverzibilni procesi) ili raste (ireverzibilni procesi). Stvarni procesi u prirodi uvijek su ireverzibilni. Ukupni prirast entropije (dS) nekog sustava jednak je zbroju prirasta entropije unutar sustava (dS_{int}) i prirasta entropije uslijed interakcije s okolinom (dS_{ext}) što je prikazano izrazom

$$dS = dS_{\text{ext}} + dS_{\text{int}}. \quad (26)$$

Entropija S nekog dijela kontinuuma volumena V u trenutku t iznosi :

$$S = \int_{V(t)} \rho \cdot s(\bar{\mathbf{x}}, t) dV. \quad (27)$$

Ukupna produkcija entropije u jedinici vremena $\Gamma(t)$ je razlika između brzine promjene entropije $\dot{S}(t)$ i vanjske entropije $\tilde{Q}(t)$. Drugi zakon termodinamike kaže da ukupna produkcija entropije za sve termodinamičke procese nikad nije negativna i predstavljena je izrazom

$$\Gamma(t) = \dot{S}(t) - \tilde{Q}(t) \geq 0. \quad (28)$$

Ova relacija jasno dokazuje tendenciju u vremenu opisanu smjerom energijskog prijenosa i pretpostavkom nepovrativog termodinamičkog procesa.

4.1.3. Clausius Duhemova nejednadžba

Clausius-Duhemova nejednadžba je kombinacija prvog i drugog zakona termodinamike. Do promjene entropije unutar volumena V može doći zbog stvaranja entropije unutar V ako je proces povrativ i zbog interakcije s okolišem na način da je

$$\dot{S}(t) \geq - \int_{S(t)} \bar{h} \cdot \bar{n} dS + \int_{V(t)} \tilde{r} dV. \quad (29)$$

Uvođenjem izraza $\tilde{r} = \frac{\rho \cdot r}{T}$ i $\bar{h} = \frac{\bar{q}}{T}$, gdje je r gustoća snage toplinskih izvora tj. brzina dovođenja topline po jedinici obujma, dobije se nejednakost koja predstavlja Clausius-Duhemovu nejednadžbu

$$\rho \cdot \dot{s} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) - \rho \frac{r}{T} \geq 0. \quad (30)$$

Koristeći prvi zakon termodinamike $\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho r = \sigma_{ij} D_{ij} - \rho \dot{u}$ dobivamo

$$\sigma_{ij} D_{ij} - \rho \dot{u} + \rho T \dot{s} - \frac{q_i g_i}{T} \geq 0. \quad (31)$$

Uvođenjem Helmholtzove slobodne energije

$$\Psi = u - Ts, \quad (32)$$

i Gibbsove slobodne energije

$$\Phi = \Psi - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (33)$$

možemo napisati Clausius-Duhemovu nejednadžbu u obliku

$$\sigma_{ij} D_{ij} - \rho (\dot{\Psi} + \dot{T}s) - \frac{q_i g_i}{T} \geq 0, \quad (34)$$

$$-\rho \dot{\Phi} - \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \rho s \dot{T} - \frac{q_i g_i}{T} \geq 0. \quad (35)$$

Clausius-Duhemova nejednadžba, postavlja određena ograničenja na konstitutivne jednadžbe, tj. jednadžbe koje fenomenološki opisuju ponašanje materijala.

4.2. Termodinamika nepovrativog procesa

Viskoelastičnost, oštećenje i trajne deformacije oblici su nepovrativih termodinamičkih procesa. Za zatvorene sustave i primjenom formulacije malih deformacija, nejednadžba produkcije entropije predstavljena je izrazima (34) i (35). Konstitutivne jednadžbe dovode u vezu set neovisnih varijabli (kao što su deformacija, temperatura, temperaturni gradijent), sa setom ovisnih varijabli stanja (kao što je naprezanja, slobodna energija, entropija). Veza između nezavisnih i zavisnih varijabli mora zadovoljiti Clausius-Duhemovu nejednadžbu kako bi se pronašao matematički kostur unutar koje su razvijene konstitutivne jednadžbe.

Opis vrlo komplicirane procedure kroz koju mikrostruktura može biti nepovrativo preraspoređena zahtijeva uvođenje dodatnih kinematičkih varijabli. Budući da se energija mora raspršiti tijekom nepovratne pregradnje mikrostrukture, entropija tada mora ovisiti o dodatnim kinematičkim varijablama, odnosno unutarnjim varijablama. Svaka unutarnja varijabla opisuje disipativni mehanizam pregradnje mikrostrukture. Pri tome su termodinamičke sile koje djeluju na mikrostrukturnu pregradnju opisane pomoću konjugiranih unutarnjih varijabli.

Matematički, formulacija termodinamički nepovrativih procesa kao što su viskoelastičnost, oštećenje i trajne deformacije slijedi slijedeći algoritam. Prvo, moraju biti definirane varijable stanja, te definiran njihov međusobni odnos pomoću pretpostavki o postojanju termodinamičkog potencijala (Helmholtzova slobodna energija) počevši od izvođenja zakona stanja. Zatim mora biti izveden disipacijski zakon unutarnjih varijabli stanja pod pretpostavkom o postojanju disipacijskog potencijala (Gibbsova slobodna energija) počevši od definiranja zakona unutarnjih varijabli.

Općenita definicija termodinamičke sile pridružene unutarnjim varijablama je kako slijedi:

$$A_k = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \right), \quad (36)$$

gdje je konjugirana sila A_k povezana s unutarnjom varijablom V_k pomoću termodinamičkog potencijala Ψ . Također se može pokazati da vrijedi [86]

$$\sigma = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \right), \quad (37)$$

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T}. \quad (38)$$

Jednadžbe (36), (37) i (38) čine jednadžbe stanja [46].

4.3. Osnovna termodinamička razmatranja

Helmholtzovu slobodnu energiju može se pretpostaviti u obliku

$$\psi = \bar{\psi}(\varepsilon_{ij}, T, g_i, \alpha), \quad (39)$$

gdje α predstavlja set unutarnjih varijabli stanja. Analogno se i za ostale unutarnje varijable stanja uvode konstitutivne jednadžbe gdje su S , σ_{ij} , q_i i $\dot{\alpha}$ funkcije od ε_{ij} , T , g_i i α . Funkcija ψ je kontinuirana i derivabilna s obzirom na njezine argumente te vrijedi

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial g_i} \dot{g}_i + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha} \dot{\alpha}. \quad (40)$$

Uvrštavanjem izraza (40) u nejednadžbu (34) te se njenim sređivanjem dobiva:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial T}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial g_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha} + \frac{g_0}{T_0} \bar{q} \leq 0. \quad (41)$$

Za slučaj viskoelastične deformacije samo prvi član nejednadžbe u izrazu (41) mora zadovoljiti nejednakost, dok za slučaj viskoelastičnosti spregnute s oštećenjem nejednakost mora zadovoljiti samo drugi član nejednadžbe u izrazu (41). Eksperimentima je pokazano da se kortikalna kost upravo ponaša na opisan način. Do određenog graničnog iznosa naprezanja (*threshold stress*) σ_{th}^D , kortikalna kost ponaša se kao linearno viskoelastičan materijal, dok se za veća naprezanja, pored efekta viskoelastičnosti pojavljuju oštećenja.

U skladu s [34] i [46], za definiranje konstitutivnog modela uvode se slijedeće unutarnje varijable stanja: α_n set skalarnih varijabli za opisivanje viskoelastičnosti, β_m set skalarnih varijabli za opisivanje plastičnih deformacija, dok je oštećenje opisano s dvostruko simetričnim tenzorom 4. reda w_{pqrs} . Nejednadžba koja opisuje disipaciju energije (31) može se zapisati u obliku

$$-\dot{\Phi} - \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - S \dot{T} - \frac{q_i g_i}{T} \geq 0, \quad (42)$$

gdje je Φ Gibbsova slobodna energija po jedinici volumena odnosno disipacijski potencijal koji je pretpostavljen u obliku

$$\Phi = \Phi(\sigma_{ij}, \alpha_n, \beta_m, w_{pqrs}, T). \quad (43)$$

Uvrštavanjem derivacije izraza (43) u nejednadžbu (42) te se njenim sređivanjem dobiva

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T}, \quad A_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n}, \quad B_m = -\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_m}, \\ \Omega_{pqrs} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial w_{pqrs}}, \quad A_n \dot{\alpha}_n + B_m \dot{\beta}_m + \Omega_{pqrs} \dot{w}_{pqrs} - \frac{q_i g_i}{T} \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

gdje su A_n , B_m i Ω_{pqrs} termodinamičke varijable spregnute s α_n , β_m i w_{pqrs} . Deformacija i Gibbsova slobodna energija mogu se rastaviti na viskoelastičan dio ($\varepsilon_{ij}^v, \Phi^v$) i plastičan dio (ε_{ij}^p i Φ^p) u obliku

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^v(\sigma_{ij}, \alpha_n, w_{pqrs}, T) + \varepsilon_{ij}^p(\sigma_{ij}, \beta_m, w_{pqrs}, T), \quad (45)$$

$$\Phi = \Phi^v(\sigma_{ij}, \alpha_n, w_{pqrs}, T) + \Phi^p(\sigma_{ij}, \beta_m, w_{pqrs}, T). \quad (46)$$

Nakon sređivanja ovih izraza dobiju se sljedeće nejednadžbe

$$\begin{aligned} A_n \dot{\alpha}_n &\geq 0, \quad A_n \dot{\alpha}_n + \Omega_{pqrs}^v \dot{w}_{pqrs} \geq 0, \\ B_m \dot{\beta}_m &\geq 0, \quad B_m \dot{\beta}_m + \Omega_{pqrs}^p \dot{w}_{pqrs} \geq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

U izrazima (47) prva nejednadžba treba biti zadovoljena za slučaj viskoelastičnih deformacija, druga za viskoelastične deformacije spregnute s oštećenjem, treća za plastične deformacije, dok četvrta nejednadžba vrijedi za slučaj plastičnih deformacija spregnutih s oštećenjem.

Marklund sa suradnicima [60], kao što je već napomenuto u uvodnom dijelu ovog poglavlja, koristi konstitutivan model koji odgovara izrazu (45) gdje ukupnu deformaciju dobiva zbrajanjem modela viskoelastičnosti spregnutog s oštećenjem te modela viskoplastičnosti spregnutog s oštećenjem.

4.4. Viskoelastičnost spregnuta s oštećenjem

U ovom odlomku dan je prikaz formulacije konstitutivnog modela za linearno viskoelastičano ponašanje materijala spregnuto s oštećenjem, koji je predložen u [98] za analizu kompozitnih materijala. Najprije je izveden trodimenzijski model uz anizotropno ponašanje neoštećenog, kao i oštećenog materijala. Nakon toga je analiziran slučaj izotropnog ponašanja materijala.

4.4.1. Trodimenzijski model

U slučaju viskoelastične deformacije spregnute s oštećenjem, za ravnotežno stanje naprezanja i oštećenja unutarnje varijable viskoelastičnosti mogu se pretpostaviti u obliku $\alpha_n^e = \alpha_n^e(\sigma_{ij}, w_{pqrs})$. Nadalje disipacijska energija može biti napisana u obliku Taylorovog reda oko ravnotežne vrijednosti α_n^e . Budući da je prva derivacija disipacijske energije jednaka nuli, ta se jednadžba reducira na

$$\Phi^v = \Phi_e^v + \frac{1}{2} \Phi_{nl}^v (\alpha_n - \alpha_n^e) (\alpha_l - \alpha_l^e), \quad (48)$$

Termodinamički koeficijent definira se kao $A_n = -\partial \Phi^v / \partial \alpha_n$ i $A_n = \gamma_{nl} \cdot \dot{\alpha}_l$ gdje je $\gamma_{nl} = \gamma_T(T) \cdot \gamma_{nl}^0$. Ako se prethodni izrazi uvrste u jednadžbu (48) dobiva se

$$\gamma_{nl}^0 \frac{d\alpha_l}{d\xi} + \Phi_{nl}^v \alpha_l = \Phi_{nl}^v \alpha_l^e, \quad (49)$$

gdje je ξ temperatura transformirana u vremenu t i definirana pomoću $d\xi = dt / \gamma_T(t)$, što nakon integriranja dovodi do

$$\xi = \int_0^t \frac{dt'}{\gamma_T(T(t'))}. \quad (50)$$

Jednadžba (50) se može zapisati u dijagonalnom obliku i njezino rješenje je

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n^e (1 - e^{-\xi/\tau_n}). \quad (51)$$

Ako se izraz (51) uvrsti u (49) te uzme u obzir prva relacija u izrazu (44), dobije se

$$\varepsilon_{ij}^v = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_{ij}} + \sum_n \left[1 - e^{-\xi/\tau_n} \right] \frac{\partial K_n}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (52)$$

gdje je $K_n = 1/2 \cdot \Phi_n^v (\alpha_n^e)^2$ i $\Phi_0 = \Phi_e^v + \sum_n K_n$. Prvi dio jednadžbe (52) predstavlja trenutnu deformaciju, a drugi dio je prijelazni dio deformacije. Ovaj izraz potrebno je preurediti u oblik koji omogućava uvođenje efekta oštećenja. Uzimajući u obzir izotropan materijal u tu jednadžbu uvode se izrazi $\Phi_e^v = -1/2 \cdot J_{ijkl}^e M_{klmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn}$ i $K_n = 1/2 \cdot \Delta J_{ijkl}^n M_{klmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn}$ gdje je M_{klmn} funkcija oštećenja i predstavlja simetričan tenzor 4. reda. Koristeći navedene izraze jednadžba (52) može se zapisati u obliku

$$\varepsilon_{ij}^v = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \tau} d\tau. \quad (53)$$

gdje J_{ijkl} označava viskoelastični tenzor podatljivosti neoštećenog materijala, t je vrijeme, τ je vrijeme retardacije. U ovoj formulaciji viskoelastični parametri materijala nisu u funkciji oštećenja. Pretpostavlja se da vremenski ovisno naprezanje i oštećenje utječu na viskoelastičnu deformaciju kroz vremenski ovisno efektivno naprezanje $\tilde{\sigma}_{kl}$ [88, 89]. Općenito, u slučaju trodimenzijskog stanja naprezanja, deformacija i oštećenja, efektivni tenzor naprezanja $\tilde{\sigma}_{kl}$ dan je sljedećom formulacijom

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (54)$$

gdje je M_{ijkl} tenzor efektivnog oštećenja kojeg karakterizira stanje oštećenja, a σ_{kl} je Cauchyovo naprezanje. Tenzor efektivnog oštećenja M_{ijkl} je tenzor četvrtog reda tako da je vrijednost funkcije oštećenja w_{mnop} takva da vrijedi [45, 46, 88, 89, 99]

$$w_{mnop} = 0 \rightarrow M_{ijkl} = I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (55)$$

gdje je I_{ijkl} jedinični tenzor dok je δ_{ij} Kroneckerov simbol.

Kao što je prikazano u [45, 46] tenzor viskoelastične podatljivosti $J_{ijkl}(t)$ može se rastaviti na trenutni (elastični) J_{ijkl}^0 i prijelazni (vremenski ovisan) $\Delta J_{ijkl}(t)$ dio neoštećenog materijala

$$J_{ijkl} = J_{ijkl}^0 + \Delta J_{ijkl}(t), \quad (56)$$

gdje je

$$J_{ijkl}^0 = J_{ijkl}^e - \sum_n \Delta J_{ijkl}^n, \quad (57)$$

$$\Delta J_{ijkl}(t) = \sum_n \Delta J_{ijkl}^n (1 - e^{-t/\tau_n}). \quad (58)$$

U jednadžbi (57) J_{ijkl}^e predstavlja početni tenzor podatljivosti. Za slučaj izotropnog oštećenja varijabla oštećenja w_{mnop} je jedna skalarna varijabla te su jednadžbe zakona oštećenja prikazane sljedećim izrazima

$$w_{mnop} = w I_{mnop}, \quad (59)$$

$$M_{mnop} = \frac{1}{1-w} I_{mnop}. \quad (60)$$

4.4.2. Jednodimenzijski model

Za jednoosno stanje naprezanja i deformacije izraz (53) postaje

$$\varepsilon = \int_0^t J_{1111}(t-\tau) \frac{d\tilde{\sigma}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (61)$$

Nakon sređivanja i provođenja integriranja pomoću programskog paketa Mathematica [100], te pozivajući se na izraze (14) i (15), prethodna jednačba poprima oblik

$$\varepsilon = J_0 \sigma \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot (1-z)^{-\rho} + J_1 \sigma t^\gamma \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot {}_2F_1(1, \rho, \gamma+1, z), \quad (62)$$

gdje je ${}_2F_1$ oznaka za hipergeometrijsku funkciju, $\rho = 1/(r+1)$ i $z = t/t_c$. Parametri materijala u jednačbi (62) bit će određeni iz eksperimentalnih rezultata.

Razvojem hipergeometrijske funkcije u red i uzimanjem njezina prva dva člana, jednačba (62) za slučaj puzanja se može zapisati kao

$$(\varepsilon_{VE}^D)_c = J_0 \sigma \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot \left[1 - \frac{t}{t_c}\right]^{-\rho} + J_1 \sigma t^\gamma \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot \left[1 + \frac{\rho}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c}\right], \quad (63)$$

dok za slučaj rasterećenja ima oblik

$$(\varepsilon_{VE}^D)_r = J_1 \sigma \left[t^\gamma - (t-t_0)^\gamma \right] \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot \left[1 + \frac{\rho}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c}\right]. \quad (64)$$

4.5. O konstitutivnom modelu

Eksperimentalna istraživanja provedena u ovom radu na kompozitnom materijalu te na goveđoj kortikalnoj kosti, o kojima će biti više riječi u slijedećem poglavlju, su kratka ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem uz promjenjivu amplitudu opterećenja koja se povećava u svakom novom ciklusu puzanja. Jedan takav ciklus prikazan je na slici 10. Prilikom procesa rasterećenja deformacija koja se ustabili je trajna, a povećavajući amplitudu opterećenja u svakom novom ciklusu dolazi do pojave akumuliranja oštećenja i akumuliranja viskoplastične deformacije. Pošto eksperimenti počinju s niskom razinom početnog opterećenja u prvom ciklusu, time se navedene akumulacije ne uočavaju s

početnim opterećenjem. Kako opterećenje iz ciklusa u ciklus raste, određenim kriterijima određuju se granične vrijednosti naprezanja kod kojih se počinju javljati navedena akumuliranja, a to su granična vrijednost naprezanja pri kojoj se javljaju viskoplastične deformacije σ_{th}^{VP} i granična vrijednost naprezanja pri kojoj se počinje akumulirati oštećenje σ_{th}^D . Na taj način ove dvije granične vrijednosti naprezanja dijele proces puzanja materijala na tri faze ovisno o veličini naprezanja pri puzanju.

U prvoj fazi ($\sigma < \sigma_{th}^{VP}$) pojavljuje se samo viskoelastična deformacija koja se izračunava prema sljedećim izrazima za slučaj puzanja

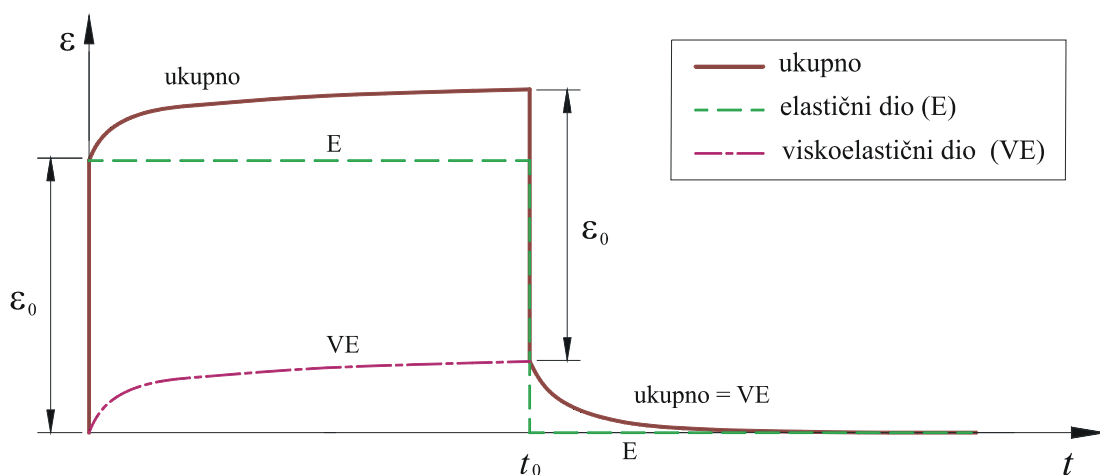
$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{VE})_c = J_0 \sigma + J_1 \sigma t^\gamma, \quad (65)$$

odnosno za slučaj rasterećenja

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_{VE})_r = J_1 \sigma \left[t^\gamma - (t - t_0)^\gamma \right]. \quad (66)$$

U izrazima (65) i (66) J_0 , J_1 i γ su parametri viskoelastičnog ponašanja materijala, a t_0 je vrijeme provedeno u puzanju.

Na slici 15 dan je shematski prikaz dijagrama puzanja i naknadnog rasterećenja za slučaj viskoelastičnog ponašanja. U procesu puzanja koji je predstavljen jednačbom (65) prvi član je elastičan dio, a drugi član je viskozni. U procesu rasterećenja koji je predstavljen jednačbom (66) primjećuje se da prvog člana iz procesa puzanja nema jer to je elastični povrat, a viskozni dio tijekom vremena iščezne.



Slika 15. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom ponašanju materijala

U drugoj fazi ($\sigma_{th}^{VP} < \sigma < \sigma_{th}^D$) uz viskoelastične deformacije počinju se pojavljivati i viskoplastične deformacije te se u tom slučaju primjenjuju sljedeći izrazi za slučaj puzanja

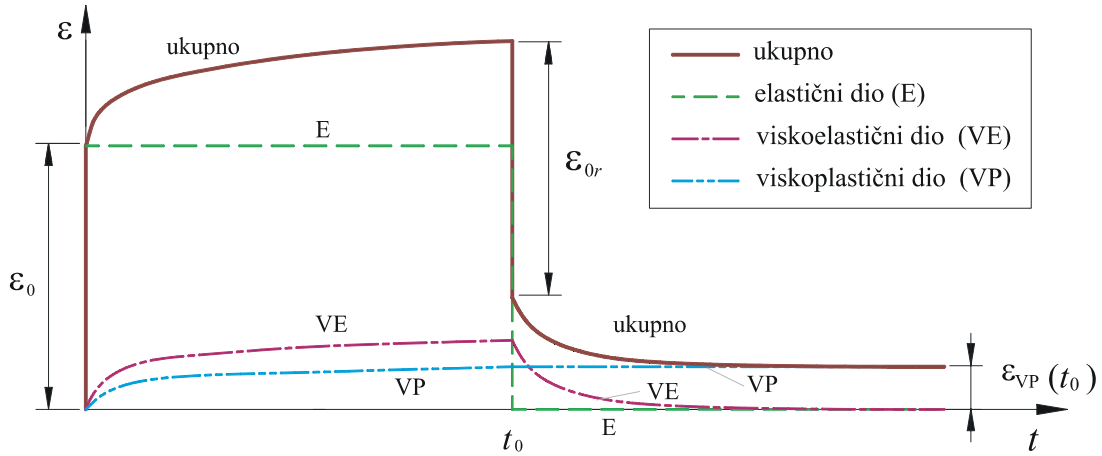
$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{VE})_c + (\varepsilon_{VP})_c = J_0 \sigma + J_1 \sigma t^\gamma + A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t^n, \quad (67)$$

odnosno za slučaj rasterećenja

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_{VE})_r + (\varepsilon_{VP})_r = J_1 \sigma \left[t^\gamma - (t - t_0)^\gamma \right] + A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t_0^n. \quad (68)$$

U izrazima (67) i (68) A , m i n su parametri viskoplastičnog ponašanja materijala.

Na slici 16 dan je shematski prikaz dijagrama puzanja i naknadnog rasterećenja za slučaj kombinacije viskoelastičnog i viskoplastičnog ponašanja. Navedeni shematski prikaz može se naći u radu [62]. U procesu puzanja koji je predstavljen jednačbom (67) prvi član je elastičan dio, a drugi član je viskoelastični, dok je treći viskoplastični. U procesu rasterećenja koji je predstavljen jednačbom (68) primjećuje se da prvog člana iz procesa puzanja nema jer to je elastični povrat, a viskoelastični dio tijekom vremena iščezne, a ostaje trajna viskoplastična deformacija.



Slika 16. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom i viskoplastičnom ponašanju materijala [62]

U trećoj fazi ($\sigma > \sigma_{th}^D$) uz navedena dva ponašanja materijala počinje se akumulirati i oštećenje te se takvo ponašanje materijala računa prema sljedećim izrazima za slučaj puzanja

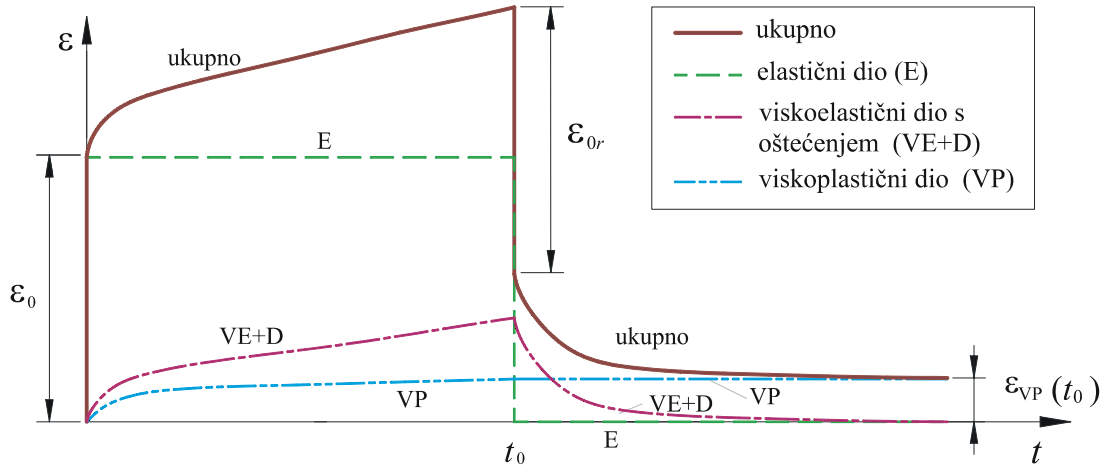
$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= (\varepsilon_{VE}^D)_c + (\varepsilon_{VP})_c = \\ &= J_0 \sigma \cdot \frac{1}{1-w_0} \left[1 - \frac{t}{t_c} \right]^{-\rho} + J_1 \sigma t^\gamma \cdot \frac{1}{1-w_0} \left[1 + \frac{\rho}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c} \right] + A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m-n} \cdot t^n, \quad (69)\end{aligned}$$

odnosno za slučaj rasterećenja:

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_{VE}^D)_r + (\varepsilon_{VP})_r = J_1 \sigma \left[t^\gamma - (t-t_0)^\gamma \right] \cdot \frac{1}{1-w_0} \cdot \left[1 + \frac{\rho}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c} \right] + A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m-n} \cdot t_0^n. \quad (70)$$

U izrazima (69) i (70) parametri oštećenja materijala "kriju" se u jednadžbi (11) za t_c , a to su C , r i w_F .

Na slici 17 dan je shematski prikaz dijagrama puzanja i naknadnog rasterećenja za slučaj kombinacije viskoelastičnog i viskoplastičnog ponašanja materijala uz pojavu oštećenja. U procesu puzanja koji je predstavljen jednadžbom (69) prva dva člana predstavljaju spregnuti model viskoelastičnosti s oštećenjem, dok je treći član model viskoplastičnosti. U procesu rasterećenja koji je predstavljen jednadžbom (70) primjećuje se da prvi član (viskoelastični dio) tijekom vremena iščezne, dok ostaje trajna viskoplastična deformacija.



Slika 17. Shematski prikaz dijagrama puzanja i rasterećenja pri viskoelastičnom i viskoplastičnom ponašanju materijala uz pojavu oštećenja

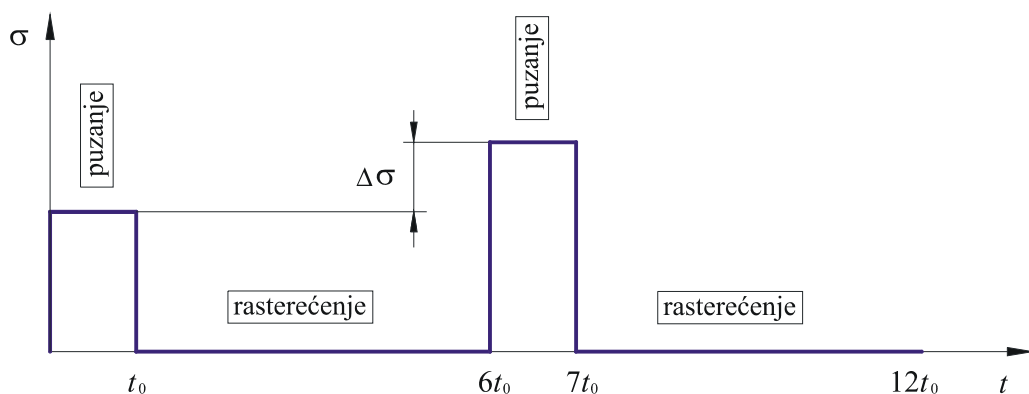
5. EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE

Eksperimentalna istraživanja provedena su na dva različita materijala: kompozitni materijal koji ima slična mehanička svojstva ljudskom kortikalnom koštano tkivu (točnije to je epoksidna smola ojačana kratkim staklenim vlaknima proizvedena u firmi SAWBONES [96] (Sawbones Europe AB in Malmö, Sweden)) i goveđe kortikalno koštano tkivo (krava 7,5 godina starosne dobi).

Razlog provedbe eksperimenata na navedenom kompozitnom materijalu je što se za slučaj istraživanja ponašanja koštanoga tkiva očekivalo "rasipanje" rezultata. Rezultati dobiveni iz eksperimenata na kompozitnom materijalu omogućili su bolju procjenu parametara materijala i opravdanosti primjene predloženog konstitutivnog modela.

Eksperimenti provedeni u ovom istraživanju su:

- Statički vlačni pokus na kompozitnom materijalu, kako bi se potvrdili parametri materijala dani od proizvođača [96].
- Ispitivanje puzanja s naknadnim rasterećenjem kako bi se odredilo vrijeme za dobivanje stabilizirane vrijednosti viskoplastične deformacije.
- Vlačna ispitivanja s kratkim ciklusima puzanja s naknadnim rasterećenjem, kako bi se odredili viskoelastični i viskoplastični parametri materijala te utvrdio početak akumuliranja viskoplastične deformacije i početak akumuliranja oštećenja zajedno s funkcijom promjene oštećenja. U ovim ispitivanjima u svakom novom ciklusu puzanja povećava se opterećenje, a ispitivanje traje sve do loma epruvete. Opterećenja su odabirana tako da početno naprezanje iznosi 20 MPa, a zatim se postepeno povećava u svakom novom ciklusu za $\Delta\sigma = 5$ MPa kod kompozitnog materijala te za $\Delta\sigma = 10$ MPa kod goveđega kortikalnoga koštanoga tkiva. Shematski prikaz ovakvog načina opterećenja dan je na slici 18. Pritom je period rasterećenja pet puta dulji od perioda puzanja, kako bi se što točnije odredile viskoplastične deformacije.

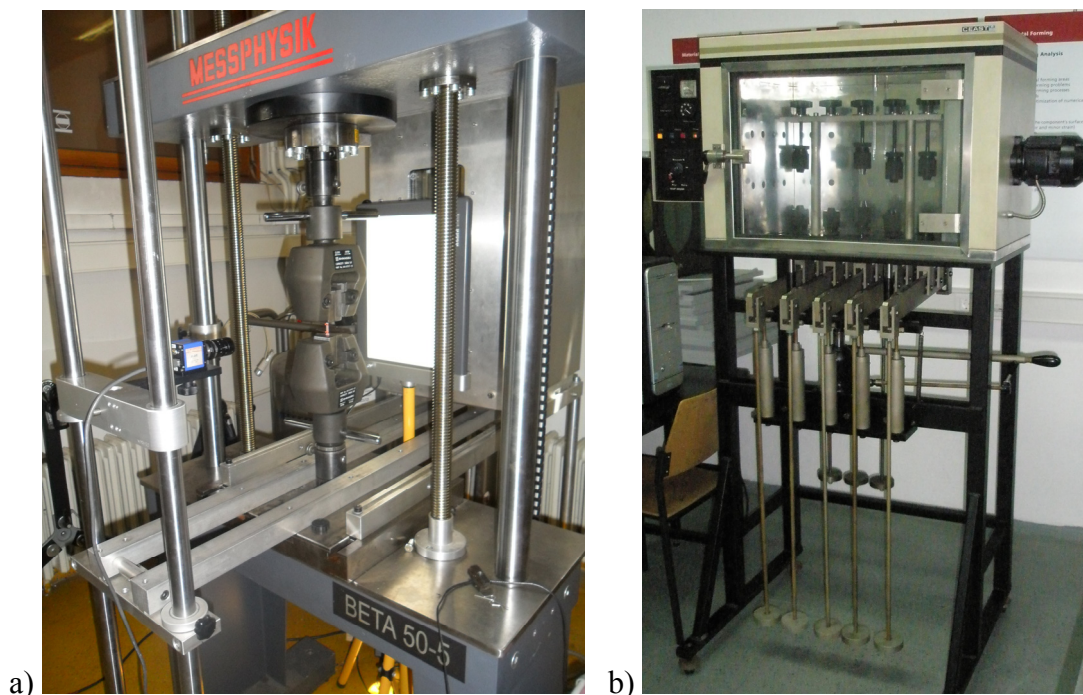


Slika 18. Shematski prikaz dijagrama cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem

- Tlačna ispitivanja s kratkim ciklusima puzanja s naknadnim rasterećenjem, gdje se također u svakom novom ciklusu postepeno povećavalo opterećenje. Ova ispitivanja napravljena su samo na goveđem kortikalnom koštanom tkivu.
- Puzanje do loma epruvete kako bi se odredilo vrijeme do loma, u svrhu određivanja pripadnih parametara oštećenja.

U tekstu koji slijedi dat će se prikaz rezultata navedenih eksperimenata na način da će najprije biti prikazani eksperimenti na kompozitnom materijalu, a nakon toga na goveđem kortikalnom koštanom tkivu. Svi eksperimenti provedeni su u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Eksperimenti su provedeni na kvazistatičkoj kidalici (MESSPHYSIK BETA 50-5, kapaciteta ± 50 kN – slika 19a), na sobnoj temperaturi. Za ciklička ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem kidalica je programirana primjenom "blockprogramm" modula, koji u sebi ima informaciju parametra kidalice za analizirani materijal, brzine primjene opterećenja i rasterećenja, vremenskog intervala držanja pojedinog opterećenja, te njegovog iznosa. Pritom se produljenje epruvete mjerilo bezkontaktnim video ekstenzometrom (slika 19a), kao i kontaktnim 25 mm ekstenzometrom (model ExA-25 tvrtke Messphysik). Isto tako, u svrhu istraživanja korištena je puzalica (CEAST 6110 - slika 19b).

Osim toga za provjeru rezultata ispitivanja dobivenih na navedenoj opremi, nekoliko eksperimenata je provedeno na kidalici SHIMADZU AG-X koja je instalirana u Laboratoriju za ispitivanje materijala na Veleučilištu u Karlovcu.

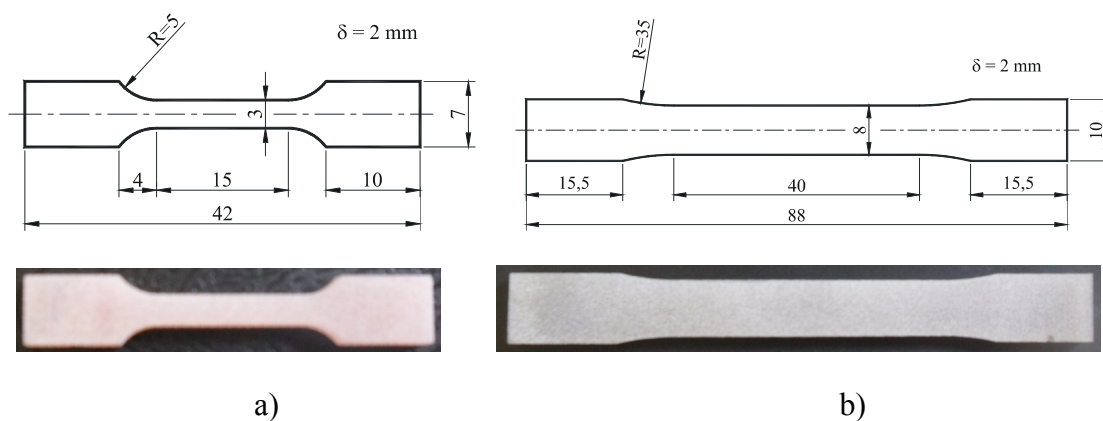


Slika 19. a) Kvizistatička kidalica Messphysik, Beta 50-5 za ispitivanje materijala b) Puzalica tipa CEAST 6110

5.1. Eksperimenti na kompozitnom materijalu

Kompozitni materijali dobivaju se kombinacijom dviju ili više komponenata, najčešće je to podatljivija i duktilnija osnova ili *matrica* te kruće i čvršće *ojačalo*. Matrica veže i održava relativan položaj ojačala, dok ojačalo na sebe preuzima opterećenje te time poboljšava svojstva matrice. Kompozitni materijali postižu specifične karakteristike i svojstva koja ne posjeduje niti jedna komponenta sama za sebe [101].

Kompozitni materijal analiziran u ovom radu je epoksidna smola ojačana kratkim staklenim vlaknima koji je mehaničkim karakteristikama sličan ljudskom kortikalnom koštanom tkivu nabavljen je iz tvrtke SAWBONES [96]. Male epruvete prikazane na slici 20a) obrađene su u navedenoj tvrtki, dok su veće epruvete prikazane na slici 20b). Veće epruvete obrađene su rezanjem vodenim mlazom na prikazani oblik epruvete iz nabavljenih kompozitnih ploča dimenzija 130×180×2 mm, koje se mogu pronaći kod proizvođača [96].



Slika 20. Skica i fotografija dvije vrste epruveta a) manja i b) veća na kojima su provedeni eksperimenti

Na prikazanim epruvetama provedeno je najprije statičko vlačno ispitivanje materijala na dvije različite kidalice: Messphysik i Shimadzu. U tablici 2 prikazani su rezultati statičkih vlačnih pokusa kompozitnog materijala (2 velike (slika 20b) i 2 male (slika 20a) epruvete) dobiveni primjenom navedenih kidalica. Usporedbom dobivenih vrijednosti vidljivo je dobro poklapanje rezultata ispitivanja. Osim toga, statički vlačni pokus potvrdio je podatke za modul elastičnosti, vlačnu čvrstoću i istežljivost materijala koji su dobiveni od proizvođača SAWBONES [96] i prikazani u tablici 3.

Tablica 2. Rezultati statičkog vlačnog ispitivanja kompozitnog materijala s dvije različite kidalice

	kidalica MESSPHYSIK	kidalica SHIMADZU
MODUL ELASTIČNOSTI	15 – 15,8 GPa	14,8 – 15,6 GPa
VLAČNA ČVRSTOĆA	92 – 98 MPa	95 – 115 MPa
ISTEZLJIVOST	0,8 – 1,2 %	1,2 – 1,5 %

Tablica 3. Tablični prikaz karakteristika kompozitnog materijala danih od proizvođača [96]

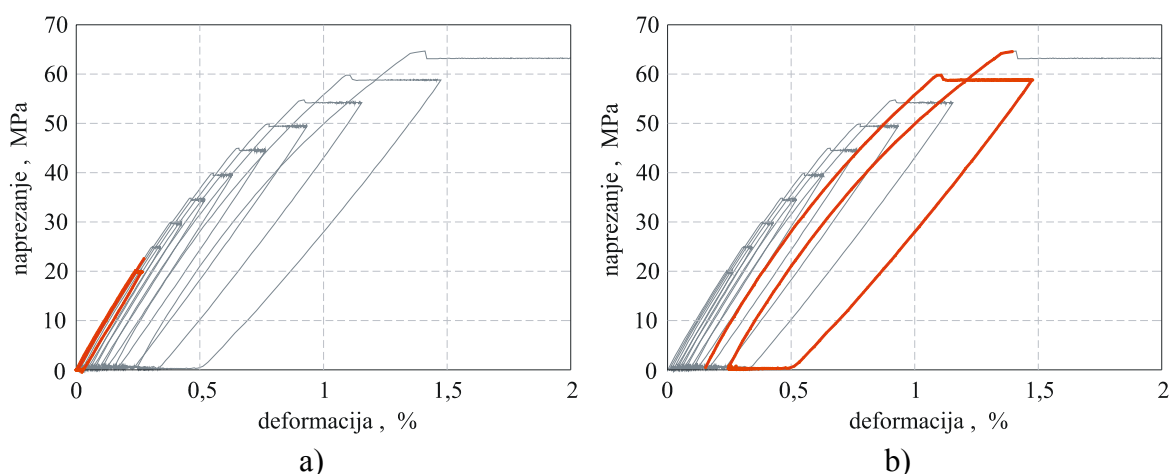
TLAČNO OPTEREĆENJE		VLAČNO OPTEREĆENJE		
TLAČNA ČVRSTOĆA	MODUL ELASTIČNOSTI	VLAČNA ČVRSTOĆA	MODUL ELASTIČNOSTI	ISTEZLJIVOST
157 MPa	16,7 GPa	106 MPa	16,0 GPa	0,8 %

Nakon statičkog vlačnog ispitivanja provedena su ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem, kako bi se odredilo vrijeme potrebno za dobivanje stabilizirane vrijednosti viskoplastične deformacije. Iako Dassapa u svom radu [63] navodi da taj period mora biti dva do tri puta dulji od perioda puzanja, u provedenim eksperimentima sa samo jednim ciklusom vidljivo je da je taj period nešto dulji. Odabrani pet puta dulji period držanja epruvete u

rasterećenju no što je to u puzanju dovoljan je da trajna deformacija poprimi stabiliziranu vrijednost.

Ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem gdje se postepeno povećavalo opterećenje u svakom novom ciklusu provedena su na deset epruveta, pet malih (slika 20a) i pet velikih (slika 20b). Početno naprezanje puzanja u prvom ciklusu bilo je 20 MPa, a u svakom novom ciklusu naprezanje se povećalo za 5 MPa. Epruvete su bile opterećene na cikličko puzanje sve do loma.

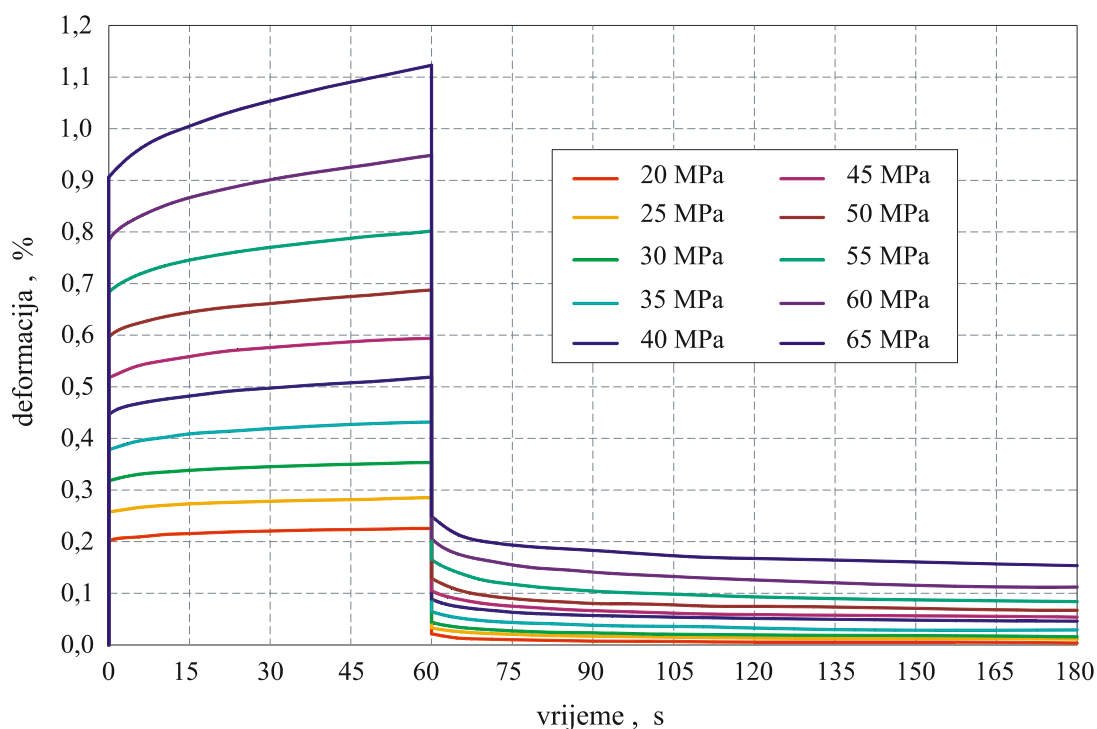
Na slici 21 prikazani su dijagrami ovisnosti naprezanja o deformaciji jednog od cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem, gdje je istaknut prvi (pod a) i zadnji (pod b) ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete. Kako nivo opterećenja raste, tako raste i širina petlje histereze. Opadanje krutosti znak je akumuliranja oštećenja, dok je efekt histereze znak viskoznog ponašanja.



Slika 21. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja epruvete na puzanje s naknadnim rasterećivanjem. Istaknut je a) prvi i b) zadnji ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete

Dijagram s uprosječenim rezultatima ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem na 10 epruveta prikazan je na slici 22. Na dijagramu je prikazana ovisnost deformacije o vremenu za sve razine opterećenja kod kojih nije došlo do loma epruvete. Iako se svaki novi ciklus s većim opterećenjem nastavlja na prethodni, radi bolje preglednosti početak dijagrama svakog novog ciklusa postavljen je u ishodište ($t = 0$, $\varepsilon = 0$). Isto tako, na dijagramskom prikazu ovisnosti deformacije o vremenu zanemareno je vrijeme potrebno za postizanje opterećenja puzanja (od nule do konačnog iznosa), kao i za slučaj rasterećenja (od konačnog iznosa do nule). Ovo zanemarenje vrijedi za sve dijagrame ovisnosti deformacije o vremenu za slučaj cikličkog puzanja s rasterećenjem koji će biti prikazani u daljnjem tekstu rada.

Na slici 22 prikazan je samo dvostruko veći period rasterećenja od perioda puzanja, dok je eksperimentom proveden pet puta veći period rasterećenja od perioda puzanja. No i ovaj prikaz je dovoljan da bi se sa slike 22 mogla uočiti tendencija stabilizacije viskoplastične deformacije.



Slika 22. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za slučaj puzanja i naknadnog rasterećenja kompozitnoga materijala s postepenim povećavanjem razine opterećenja

5.2. Eksperimenti na goveđem kortikalnom koštanom tkivu

Kako je postupak pripreme epruvete iz kosti kompliciraniji od uobičajenog, u uvodnom dijelu ovog odjeljka dat će se prikaz osnovnih koraka. Kod pripreme ispitnog uzoraka držalo se uputa koje je Knets opisao u svom radu [66], a sličnih uputa držali su se Brinkman [102], Garcia [5], Barak sa suradnicima [26] i mnogi drugi. Augustinovi rezultati [79] pokazuju da je apsolutno najutjecajniji parametar pri mehaničkoj obradi kosti hlađenje, te da tijekom obrade temperatura ne bi smjela prelaziti 47 °C. Učinci sušenja i ponovnog vlaženja na mehanička svojstva kortikalnoga koštanoga tkiva su mala i mogu se zanemariti [5]. Također je poznato da se mehaničke karakteristike smrzavanjem ne mijenjaju znatno. Van Haaren sa suradnicima u svom radu [67] odobrava period od jedne godine dubokog zamrzavanja kortikalnog koštanog tkiva prije mehaničkih ispitivanja.

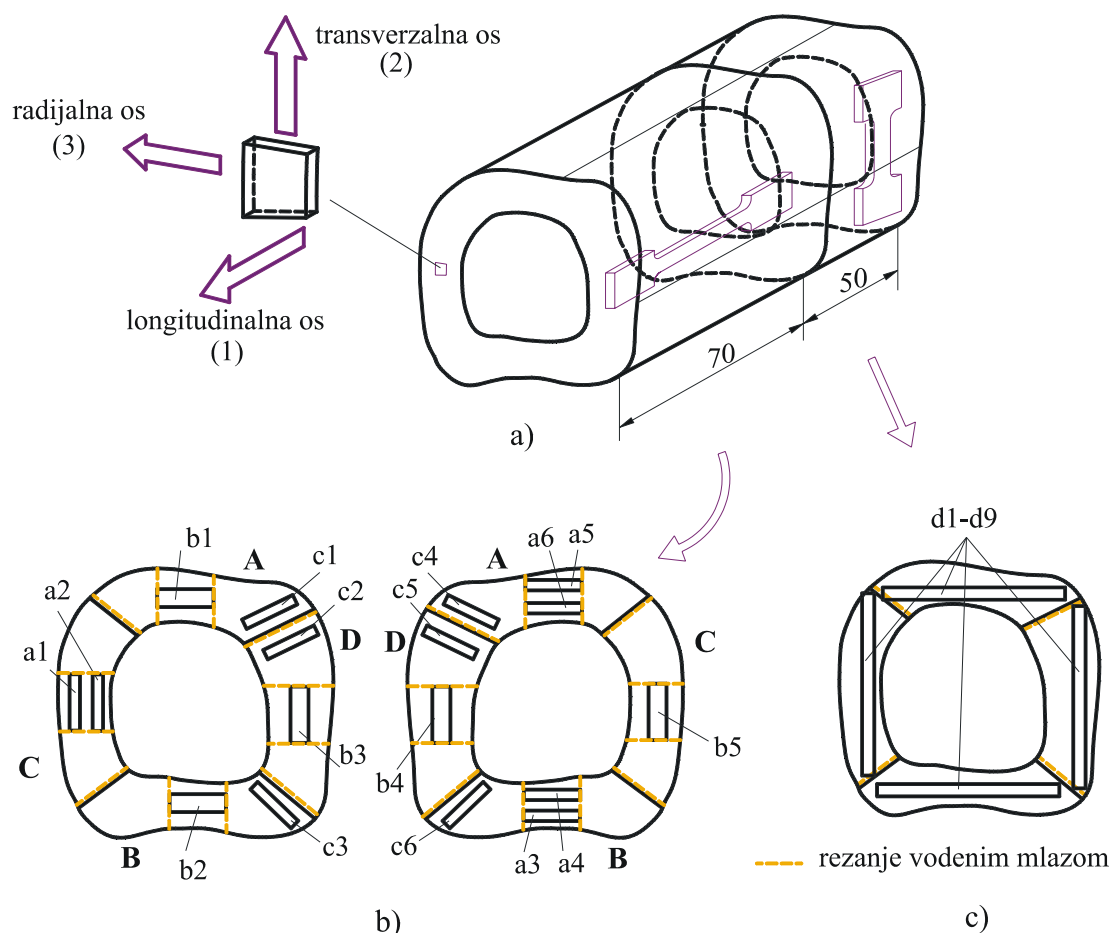
Svježa goveđa kost za izradu epruveta dobivena je iz lokalne klaonice i s nje je uklonjeno sve vanjsko meko tkivo, a iz srednjeg dijela kosti (*diaphysis*) korištenjem pile izrezan je 120 mm dugi prsten, kojem je odstranjena i koštana srž (žuta koštana moždina). Dva uzorka s lijeve i desne metatarzalne kosti (glavna kost stopala kod goveda, *lat. ossa metatarsalia III et IV*), koja se nalazi ispod stražnjih skočnih zglobova prikazana su na slici 23. Uzorci kortikalnoga koštanoga tkiva pohranjeni su na duboko zamrzavanje od $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ u roku jednog sata od uzimanja iz klaonice.



Slika 23. Metatarzalna kost: a) kortikalni dio govedega koštanoga tkiva, b) anatomski položaj

Od zamrznute dvije kosti izrezane su epruvete prema shematskom prikazu sa slike 24, a sam postupak dobivanja epruveta objašnjen je u poglavlju 5.2.1.

Na slici 24 dan je shematski prikaz zona na poprečnom presjeku kosti na kojem su uzimane epruvete za ispitivanja. Prikazane zone su prednja (A), stražnja (B), vanjska (C) i unutarnja (D). Naznačeni smjerovi na slici 24a su longitudinalni (uzdužni), koji se poklapa s anatomskim osnim smjerom kosti, transverzalni (cirkularni ili poprečni) te radijalni. Na slici 24b se mogu razlikovati tri vrste ispitnih epruveta u longitudinalnom smjeru, dok je na slici 24c prikazana jedna vrsta ispitnih epruveta u transverzalnom smjeru. U longitudinalnom smjeru, prva vrsta epruveta dimenzija $8(6)\times 3\text{ mm}$ (oznaka na slici 24b je a1-a6) korištena je za vlačne pokuse cikličkog puzanja s rasterećenjem (ukupno 6 epruveta), druga $8(6)\times 6\text{ mm}$ (oznaka na slici 24b je b1-b5) je korištena za tlačne pokuse cikličkog puzanja s rasterećenjem (ukupno 5 epruveta) te treća vrsta epruveta dimenzija $10(6)\times 3\text{ mm}$ (oznaka na slici 24b je c1-c6) je korištena za vlačno puzanje do loma (ukupno 6 epruveta). Na slici 24c također je prikazan način uzimanja ispitnih epruveta dimenzija $8(4,5)\times 3\text{ mm}$ (oznaka na slici 24c je d1-d9) u transverzalnom (poprečnom) smjeru. Na tim epruvetama provedeni su eksperimenti cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem (ukupno 9 epruveta).



Slika 24. Shematski prikaz: a) kosti s naznačenim osima, b) zona na poprečnom presjeku kosti s kojih su uzete ispitne epruvete u longitudinalnom smjeru, c) zona u poprečnom presjeku kosti s kojih su uzete ispitne epruvete u transversalnom smjeru.

Nakon pripreme, ispitni uzorci koštanoga tkiva sve do provedbe eksperimenata moraju se čuvati tako da zadrže svoju vlažnost. Najbolje ih je čuvati u zatvorenim polietilenskim vrećicama pri temperaturi od -4 do -7 °C. Preporuka je da period skladištenja do eksperimentalnog ispitivanja ne bude veći od 2 tjedna pri navedenoj temperaturi. Uzorci prije eksperimenata moraju biti u istom pakiranju na sobnoj temperaturi u trajanju od najmanje 3 sata što garantira jednoliko zagrijavanje [66].

5.2.1. Postupak obrade epruveta iz govedega kortikalnoga koštanoga tkiva

Kako je koštano tkivo anizotropan, heterogen materijal, sastavljen od vlakana i lamela, time je postupak izrade epruveta otežan. Sugita i Mitsuishi u svom radu [103] analiziraju mikrostrukturu govedega kortikalnoga koštanoga tkiva prilikom mikrorезanja, točnije prate prijelome sekundarnih osteona (Haversovog kanala) i daju smjernice za obradu materijala.

Njihov zaključak je da dubina obrade ne smije biti veća od 0,02 mm, što je dobar podatak za pripremu epruveta u ovom radu, jer prilikom obrade na glodalici nije se prelazila ova dubina.

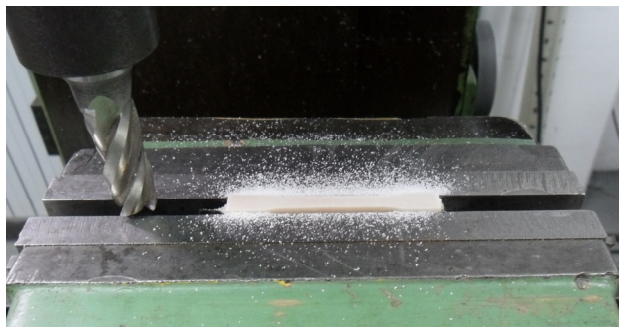
Prije obrade kost je na sobnoj temperaturi natopljena u 0,9 % fiziološkoj otopini (*Natrii chloridi infundibile*) otprilike jedan sat, dok se nije odmrznula. Obrada koštanoga tkiva ostvarena je najprije rezanjem vodenim mlazom, koja je provedena u tvrtki "KAPRI d.o.o.", Zagreb. Rezanje vodenim mlazom je hladna obrada materijala pri kojoj nema zagrijavanja obratka, što je vrlo važno za izradu epruveta iz ovog materijala. Rezanje se postiže vodom pod visokim pritiskom (cca. 3000 bara) s mogućnošću dodatka finog granitnog pijeska kao abraziva. Svaka kost je ovakvim rezanjem podijeljena na četiri kvadranta, pri čemu se pazilo da u svakom kvadrantu postoji prednji, stražnji, unutarjni i vanjski dio (slika 24). Na svakoj četvrtini "cilindra" rezanjem vodenim mlazom izrezana je epruveta kroz cijelu debljinu stijenke. Konačan oblik ispitne epruvete rezane vodenim mlazom prikazan je na slici 25, gdje se duljina longitudinalnih epruveta poklapa s anatomske osi smjerom kosti. Nakon postupka rezanja vodenim mlazom, prikazane četvrtine "cilindra" omotane su vatom natopljenom u fiziološkoj otopini te su stavljene u polietilenske vrećice pa u duboko zamrzavanje.



Slika 25. Longitudinalna epruveta izrezana vodenim mlazom iz goveđe kosti

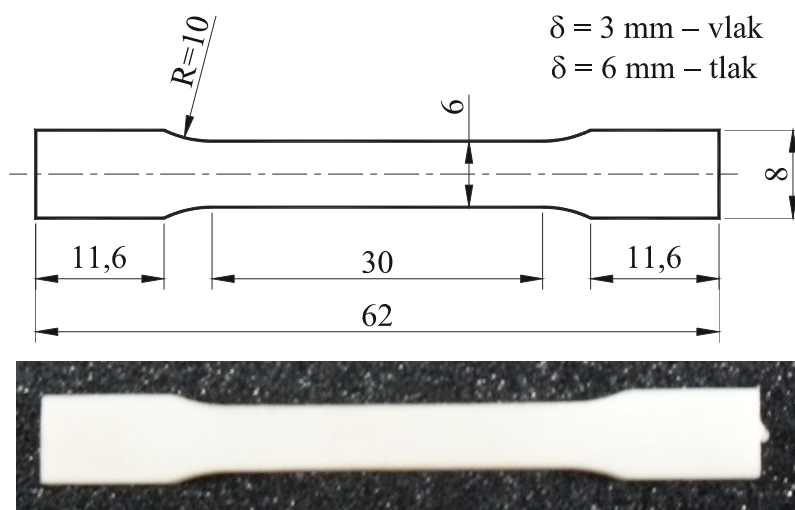
Nakon postupka rezanja vodenim mlazom pristupilo se obradi epruvete na glodalici tipa "Prvomajska Itas" s malom brzinom obrade od 250 okr/min, kako ne bi došlo do pregrijavanja koštanog tkiva. Prije obrade svaki uzorak je odmrznut natapanjem u fiziološkoj otopini na sobnoj temperaturi otprilike jedan sat.

Najprije se pristupilo izradi longitudinalnih epruveta dimenzija 8(6)×3 mm za vlačne pokuse cikličkog puzanja. Vodenim mlazom izrezana epruveta, prerezana je ručnom pilom na dvije epruvete od kojih je jedna na vanjskom obodu, a druga na unutaršnjem (slika 24b). Površina svake epruvete obrađena je na glodalici što je prikazano na slici 26. Kako bi se spriječilo isušivanje uzorka, nakon svakog prolaska glodala uzorak je ovlažen vatom natopljenom u 0,9 % fiziološkoj otopini.



Slika 26. Glodalom obradjena epruveta

Konačan oblik epruvete prikazan je na slici 27 uz podatak debljine epruvete ($\delta = 3$ mm). Nakon svake obrade epruveta iz kortikalnoga koštanoga tkiva umotala se u vatu natopljenu sa spomenutom fiziološkom otopinom, spremila u polietilensku vrećicu i ponovno zamrznula do početka eksperimentalnih ispitivanja.

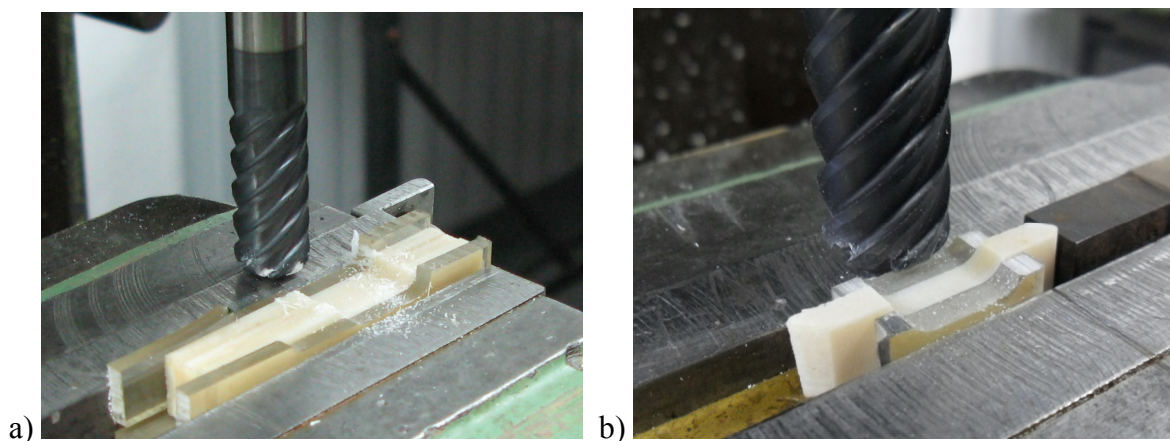


Slika 27. Skica i fotografija epruvete iz goveđega kortikalnoga koštanog tkiva namijenjena za vlačne (8(6)×3) i tlačne (8(6)×6) eksperimente cikličkog puzanja

Na isti način pristupilo se obradi epruveta dimenzija 8(6)×6 mm za tlačno cikličko puzanje, gdje su epruvete dobivene rezanjem vodenim mlazom uzete sa srednje debljine stjenke, tako da se svaka površina obradila na glodalici na malim brzinama obrade uz kontinuirano hlađenje i vlaženje fiziološkom otopinom kako bi se smanjila mogućnost pregrijavanja i isušivanja koštanoga tkiva. Slikom 27 prikazana je epruveta dobivena na glodalici iz kortikalnog koštanog tkiva uz podatak debljine epruvete ($\delta = 6$ mm).

Preostali materijal kortikalnoga koštanoga tkiva (na istom "cilindru", slika 24a) nakon rezanja vodenim mlazom iskoristio se za dobivanje epruveta dimenzija 10(6)×3 mm, koje su korištene za eksperimente puzanja do loma epruvete s primijenjenim opterećenjem većim od graničnog opterećenja za akumuliranje oštećenja. Tri uzorka paralelno su se odmrzavala u

fiziološkoj otopini oko 30-tak minuta. Nakon odmrzavanja pristupilo se obrađivanju glodalom paralelopipeda dimenzija $62 \times 10 \times 3$ mm. Svaki uzorak naizmjenično se obrađivao na dimenziju spomenutog paralelopipeda, za to vrijeme preostala dva natapala su se u fiziološkoj otopini. Na kraju se pristupilo obradi vrata epruveta specijalnim glodalom, tako što su se paralelno postavile tri epruvete između dvije aralditne ploče koje su sprečavale odlomljavanje koštanog tkiva. Slikom 28 prikazan je postupak obrade kortikalnog koštanog tkiva specijalnim glodalom 308.120.25. Slikom 28a prikazana je obrada epruvete dimenzija $10(6) \times 3$ mm rezane u longitudinalnom smjeru, a slikom 28b prikazana je obrada epruvete dimenzija $8(4,5) \times 3$ mm u tranverzalnog smjeru, o čijoj će pripremi u daljnjem tekstu biti riječi.

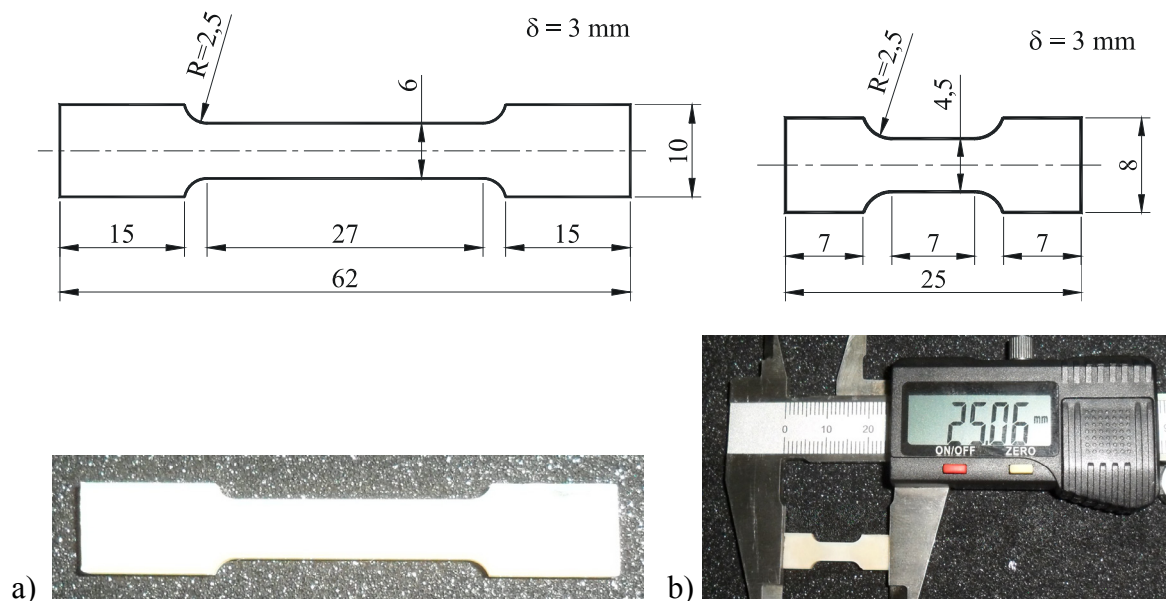


Slika 28. Obrada epruvete dimenzija a) $10(6) \times 3$ mm u longitudinalnom smjeru, b) $8(4,5) \times 3$ mm u tranverzalnog smjeru glodalom 308.120.25

Konačan oblik epruvete prikazan je na slici 29a. Epruveta je korištena za vlačna ispitivanja puzanja do loma kako bi se odredili parametri oštećenja. Ovdje je također nakon obrade svaka epruveta posebno zamotana u vatu natopljenu fiziološkom otopinom, stavljena u polietilensku vrećicu i ponovo zamrznuta.

Na kraju se pristupilo izradi epruveta u tranverzalnog (poprečnog) smjeru. Od preostalog materijala (manji cilindar na slici 24a) na isti način kao i kod prethodno opisane epruvete pristupilo se obrađivanju glodalom paralelopipeda dimenzija $25 \times 8 \times 3$ mm. Svi uzorci naizmjenično su se obrađivali na dimenziju spomenutog paralelopipeda i time su naizmjenično bili natopljeni u fiziološkoj otopini. Na kraju se pristupilo obradi vrata epruvete specijalnim glodalom na način da se epruveta stavljala između dvije aralditne ploče, što je sprečavalo odlomljavanje epruvete (slika 28b). Na slici 29b prikazan je skicom i fotografijom konačan oblik epruvete dimenzija $8(4,5) \times 3$ mm u tranverzalnog smjeru. Ova epruveta

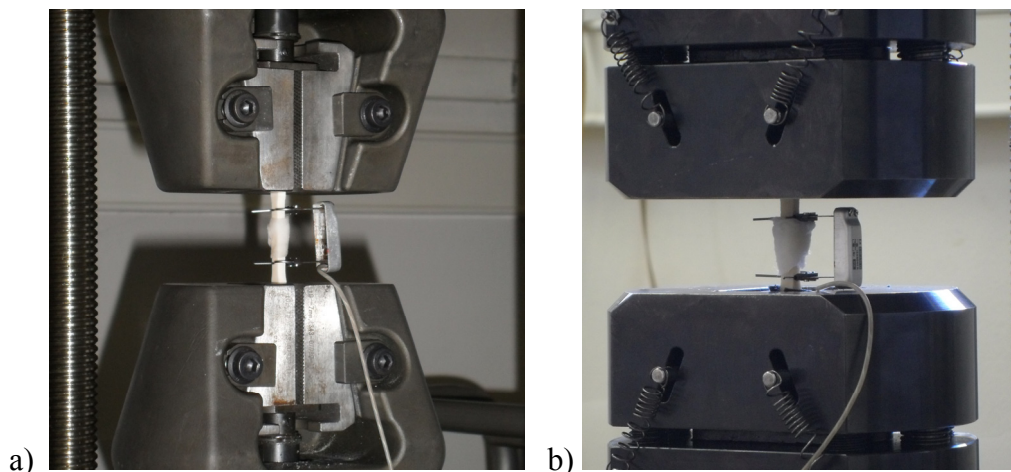
korištena je za vlačna ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem uz povećanje opterećenja u svakom novom ciklusu.



Slika 29. Skica i fotografija epruveta iz goveđeg kortikalnog koštanog tkiva dimenzija a) 10(6)×3 mm u longitudinalnom smjeru, b) 8(4,5)×3 mm u transverzalnom smjeru

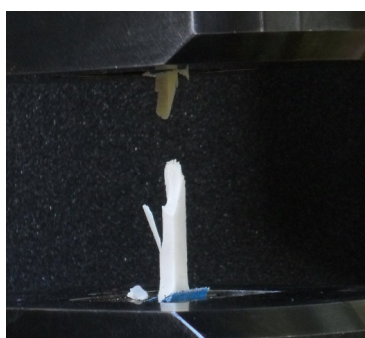
5.2.2. Provedba mehaničkih ispitivanja

Svi eksperimenti provedeni su na sobnoj temperaturi od 22 ± 2 °C uz vlažnost 65 ± 2 %. Temperatura i vlažnost okoline tijekom eksperimenta držane su konstantnim. Sušenje uzorka tijekom cijelog postupka ispitivanja sprečavalo se omatanjem vlažne vate natopljene fiziološkom otopinom oko uzorka, što je prikazano na slici 30. Opterećivanje i rasterećivanje ispitnih epruveta a1-a6, c1-c6 te d1-d9 (slika 24) provodilo se s brzinom opterećivanja od 27,8 MPa/s. U okviru eksperimentalnih ispitivanja plan je bio istražiti utjecaj brzine deformiranja na ponašanje kortikalnog koštanog tkiva za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem na način da se osim navedene brzine opterećivanja 27,8 MPa/s provedu ispitivanja i s duplo manjom brzinom opterećivanja (13,9 MPa/s). Tako je tlačno opterećivanje i rasterećivanje ispitnih epruveta b1-b5 (slika 24) provedeno s brzinom opterećivanja od 13,9 MPa/s. No, kako su za što bolje definiranje konstitutivnog modela iskorištene sve ispitne epruvete a1-a6 te c1-c6 na raspolaganju nije više bilo epruveta na kojima bi se moglo provesti vlačno ispitivanje s brzinom opterećivanja 13,9 MPa/s. Osim toga, na raspolaganju nije više bilo niti epruveta na kojima bi se moglo provesti tlačno ispitivanje s brzinom opterećivanja 27,8 MPa/s.



Slika 30. Uzorak goveđeg kortikalnog koštanog tkiva omotan vlažnom vatom tijekom a) vlačnog i b) tlačnog eksperimenta

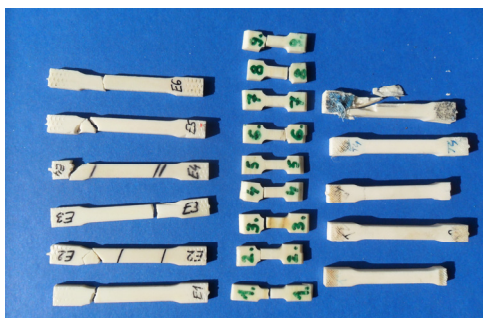
U eksperimentalnom dijelu ovog istraživanja provedeni su vlačni i tlačni pokusi cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem gdje se u svakom novom ciklusu naprezanje povećavalo za 10 MPa. Pet puta dulji period držanja epruveta u rasterećenju nego u puzanju, preuzet iz eksperimenta na kompozitnom materijalu, više je nego dovoljan da se stabilizira trajna deformacija. Pritom je početno naprezanje puzanja 20 MPa, a završno 120 MPa. Nakon navedenog naprezanja, u sljedećem koraku nastupio je lom epruvete. Vlačna ispitivanja provedena su na epruvetama dimenzija 8(6)×3 mm, a tlačna na epruvetama dimenzija 8(6)×6 mm većeg poprečnog presjeka kako ne bi došlo do gubitka stabilnosti epruvete. Ispitna konfiguracija vlačnog eksperimenta prikazana je na slici 30a), dok je slikom 30b) prikazana konfiguracija tlačnog eksperimenta. Razlika između ova dva pokusa je u primijenjenim čeljustima kidalice. Lom ispitne epruvete u tlaku prikazan je na slici 31.



Slika 31. Lom epruvete prilikom tlačnog eksperimenta puzanja s naknadnim rasterećenjem

Provedena su ispitivanja i na epruvetama izrezanim u transversalnom (poprečnom) smjeru. Zbog veličine epruveta mjerenja produljenja su provedena s bezkontaktnim ekstenzometrom.

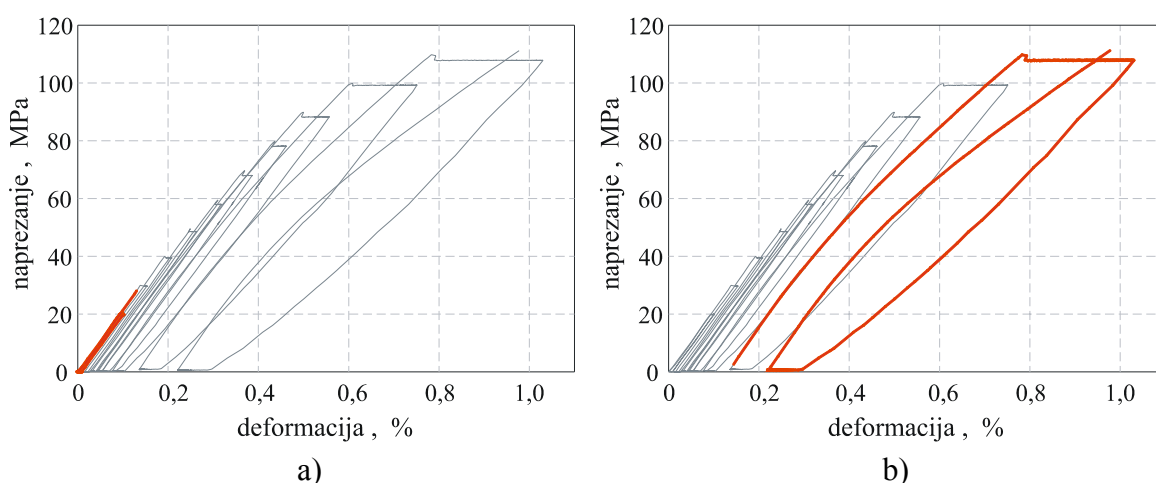
Na slici 32 prikazane su sve ispitne epruvete cikličkih testova puzanja s naknadnim rasterećenjem. Idući od lijeva na desno prikazane su epruvete najprije za vlačne testove u longitudinalnom smjeru kosti (a1-a6, slika 24), zatim za vlačne testove u transverzalnom smjeru kosti (d1-d9, slika 24) te za tlačne testove u longitudinalnom smjeru kosti (b1-b5, slika 24).



Slika 32. Epruvete korištene za cikličke testove puzanja s naknadnim rasterećenjem

5.2.3. Rezultati ispitivanja

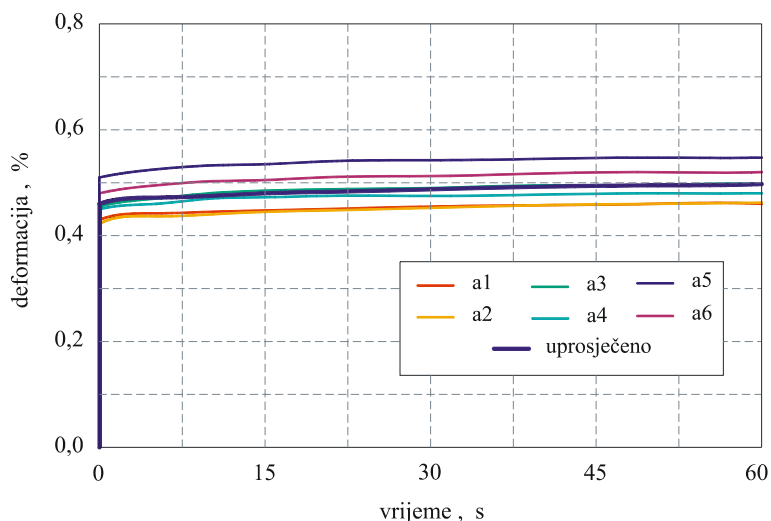
Ispitivanja vlačnog cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem u kojima se postepeno povećavalo opterećenje, provedena su na šest epruveta dimenzija 8(6)×3 mm (a1-a6, slika 24b). Na slici 33 prikazani su dijagrami ovisnosti napreznja o deformaciji jednog od cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem, gdje je istaknut prvi (pod a) i zadnji (pod b) ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete. Usporedbom ovog dijagrama s onim sa slike 21 za kompozitni materijal, vidljiva je sličnost, odnosno sličan trend ponašanja materijala.



Slika 33. Dijagram ovisnosti napreznja o deformaciji za slučaj cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem govede kosti. Istaknut je a) prvi i b) zadnji ciklus opterećenja pri kojem još nije došlo do loma epruvete

I ovdje, kako razina opterećenja raste, tako raste i širina petlje histereze. Isto tako, opadanje krutosti znak je akumuliranja oštećenja, dok je efekt histereze znak viskoznog ponašanja.

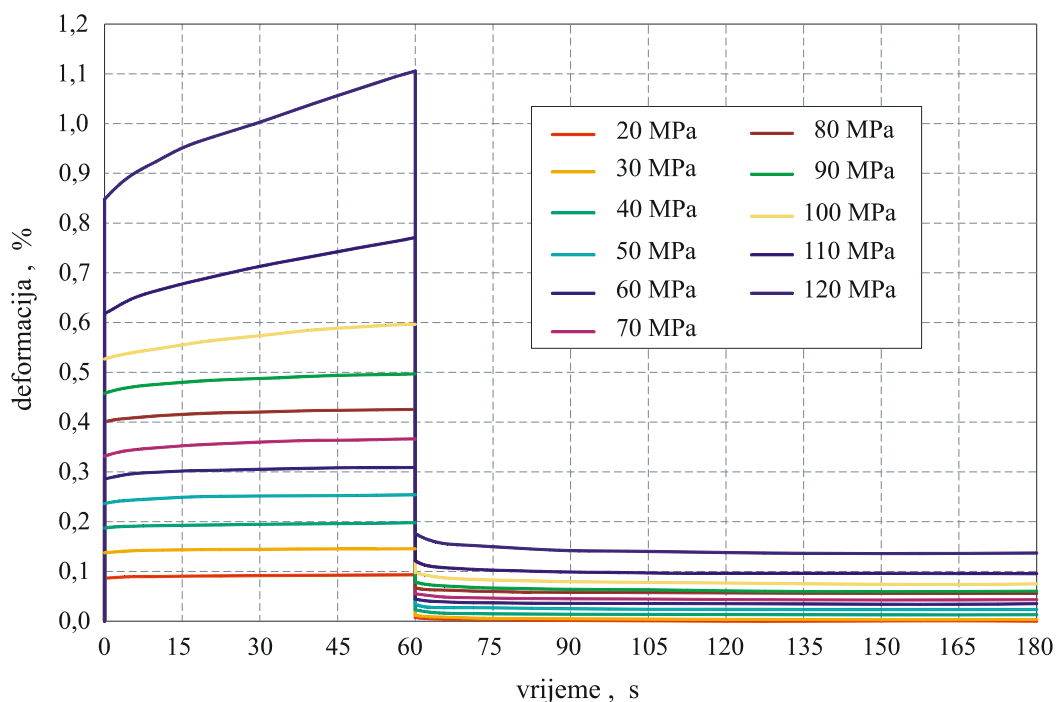
Na slici 34 prikazan je dijagram ovisnosti deformacije puzanja o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem pri naprežanju u iznosu od 90 MPa za 6 ispitnih epruveta (a1-a6) te njihova uprosječna vrijednost deformacije puzanja za navedeni iznos naprežanja. Kao što se može vidjeti sa slike 34, dobivene su razlike u ponašanju koštanih uzoraka, koji su uzeti s različitih mjesta u transversalnom odnosno cirkularnom smjeru kosti što je prikazano na slici 24b. Veća odstupanja rezultata nego kod kompozitnog materijala bila su i očekivana. Pritom maksimalno odstupanje rezultata od uprosječenih vrijednosti iznosi oko 13 %. Za bolji uvid u mehaničko ponašanje materijala kosti ovisno o položaju na poprečnom presjeku potrebno je provesti detaljniju analizu na više uzoraka materijala. No, uzimanje većeg broja uzorka zahtijeva uzorke iz drugih anatomskih dijelova tijela, ili ako se pozicioniramo samo na metatarzalnoj kosti tada trebamo uzeti uzorke s drugog goveda, što bi opet išlo u korist rasipanju rezultata. Iz tog razloga, u ovom radu određene su uprosječene vrijednosti na temelju kojih su procijenjeni parametri materijala za predloženi konstitutivni model.



Slika 34. Dijagram ovisnosti deformacije puzanja o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem pri naprežanju u iznosu od 90 MPa za 6 epruveta i njihove uprosječene vrijednosti

Dijagram uprosječenih eksperimentalnih rezultata vlačnih ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem za šest epruveta (a1-a6, slika 24b) prikazan je na slici 35. Ovdje je prikazana ovisnost deformacije o vremenu za sve razine opterećenja za koje nije došlo do loma epruvete. Kao i za slučaj kompozitnog materijala, na slici 35 prikazan je samo dvostruko

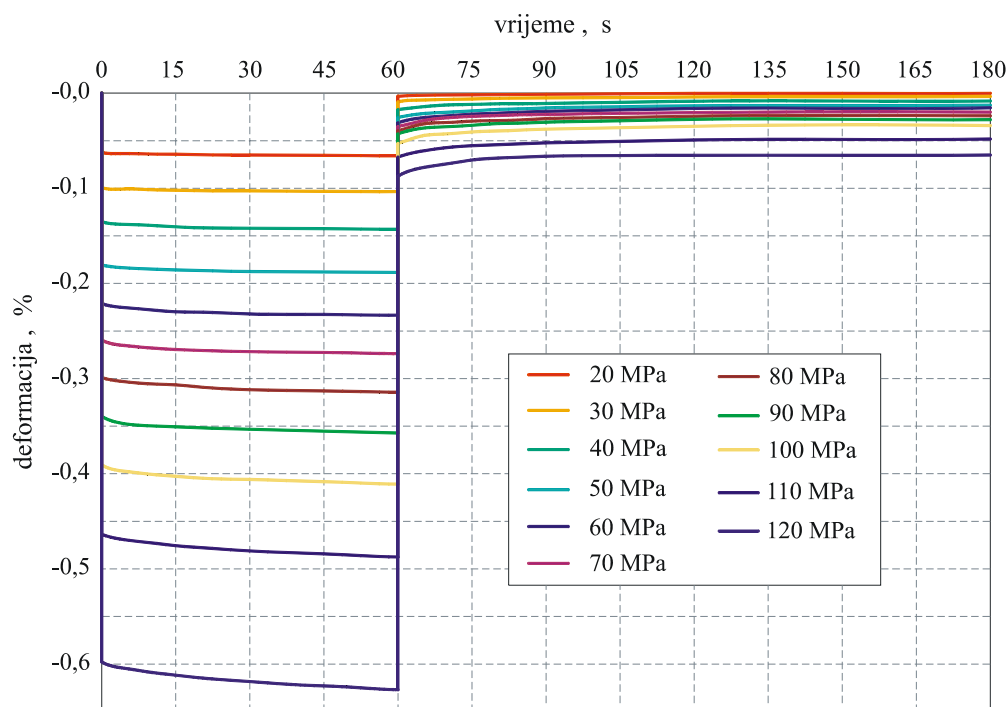
veći period rasterećenja od perioda puzanja, dok je eksperimentom proveden pet puta veći period rasterećenja od perioda puzanja. Ovdje je i ovakav prikaz dovoljan da bi se mogla uočiti tendencija stabilizacije viskoplastične deformacije.



Slika 35. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećanjem razine opterećenja

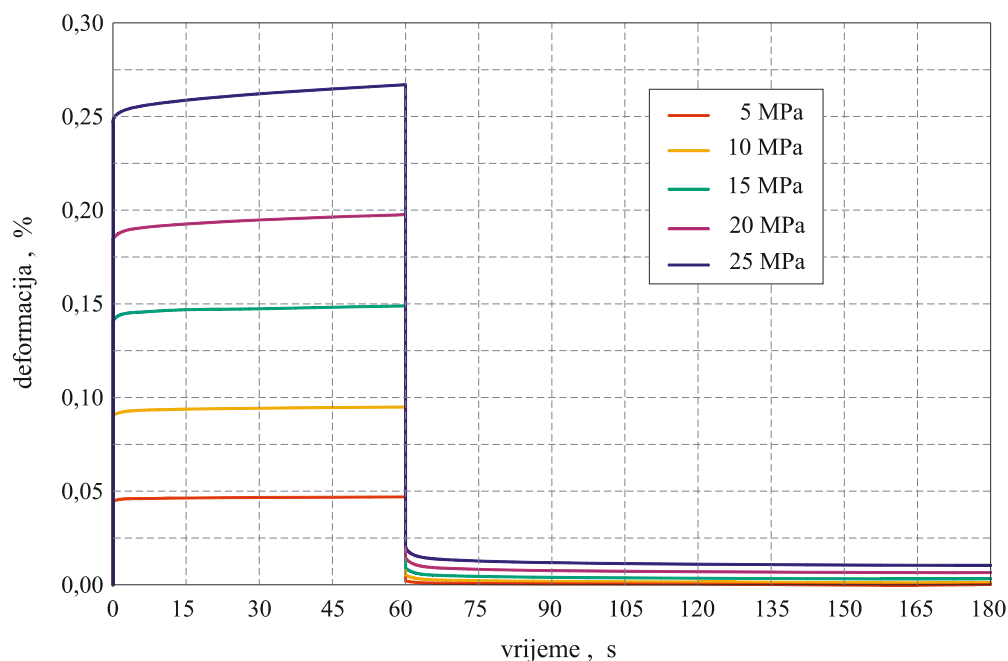
Ispitivanja tlačnog cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem u kojima se postepeno povećavalo opterećenje, provedena su na pet epruveta dimenzija 8(6)×6 mm (b1-b5, slika 24b). Na slici 36 prikazani su uprosječeni rezultati navedenog eksperimenta, točnije ovisnost deformacije o vremenu. Prikaz epruvete u tlačnom eksperimentu dan na slici 30b, a njen lom na slici 31.

Kao što je to napomenuto u odjeljku 5.2.2. vlačno opterećivanje i rasterećivanje ispitnih epruveta (rezultati prikazani na slici 35) a1-a6 (slika 24) provodilo se s brzinom opterećivanja od 27,8 MPa/s, dok je tlačno opterećivanje i rasterećivanje ispitnih epruveta (rezultati prikazani na slici 36) b1-b5 (slika 24) provedeno s 13,9 MPa/s. Iz tog razloga nije moguće provesti dovoljno dobru usporedbu rezultata vlačnog i tlačnog eksperimenta za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Ova usporedba predstavlja smjer budućih istraživanja. Neovisno o tome, iz prikazanih dijagrama može se zaključiti da su deformacije puzanja u tlaku značajnije manje od deformacija puzanja u vlaku za isti način opterećivanja i pri istoj razini opterećenja, ali uz različite brzine opterećivanja. Osim toga, može se istaknuti da je za oba opisana slučaja cikličkog opterećivanja do loma epruveta došlo pri 120 MPa.



Slika 36. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj tlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja

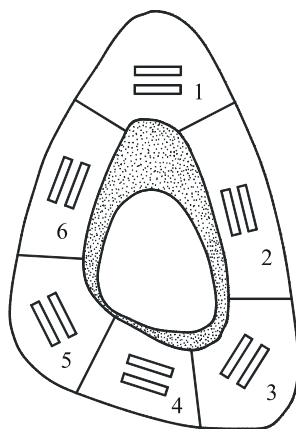
Nadalje je provedeno ispitivanje vlačnog cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem u kojima se postepeno povećavalo opterećenje. Eksperimenti su provedeni na devet epruveta uzetih u transverzalnom smjeru kosti, dimenzija 8(4,5)×3 mm (d1-d9, slika 24c). Na slici 37 prikazani su uprosječeni rezultati navedenog eksperimenta.



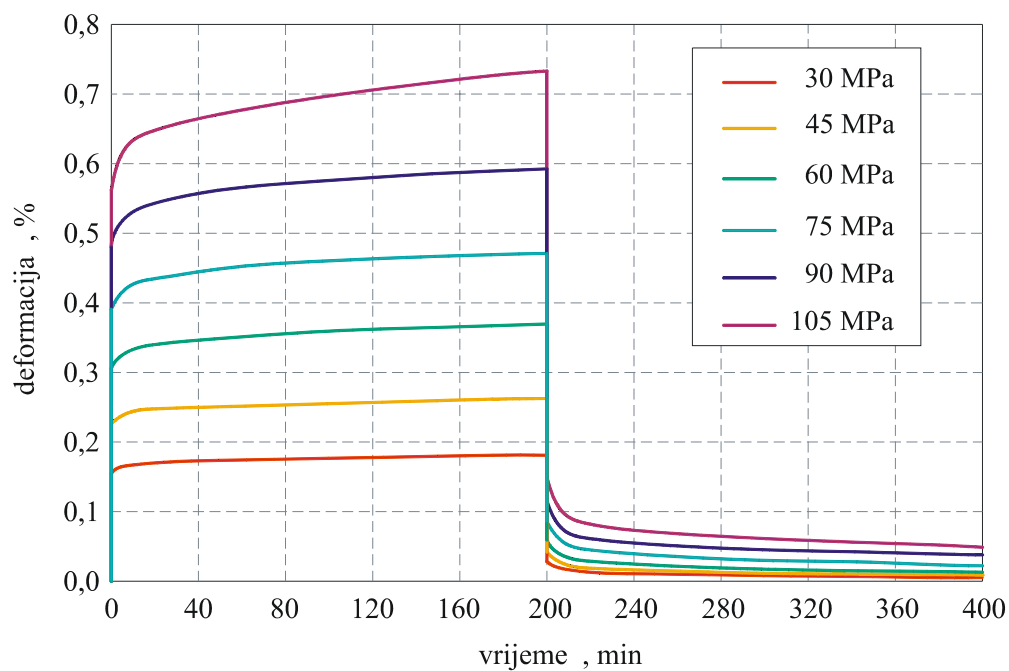
Slika 37. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo za slučaj vlačnog puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja na transverzalnim epruvetama

5.3. Eksperiment na ljudskom kortikalnom koštanom tkivu iz literature

Melnis sa suradnicima [30] provodi eksperimente puzanja s naknadnim rasterećenjem na ljudskom kortikalnom koštanom tkivu. Uzorci u obliku paralelopipeda dimenzija $100 \times 6 \times 1$ mm uzeti su sa srednjeg dijela dijafize (*diaphysis*) potkoljениčne kosti (*tibia*) od petorice muškaraca starosne dobi od 30 do 50 godina. Uzorci su rezani duž longitudinalne osi kosti, a poprečni presjek podijeljen je u 6 zona. U svakoj zoni izrezane su po dvije epruvete po debljini kružnog vijenca kako je prikazano na slici 38. Eksperimenti puzanja i rasterećenja provedeni su pri temperaturi $37 \pm 0,5$ °C i vlažnosti 90 ± 2 % na šest nivoa opterećenja od 30 do 105 MPa i prikazani su na slici 39. Prikazani rezultati eksperimenta iz literature [30] dani su za prvu zonu sa slike 38 u kojoj su se pokazali najveći iznosi deformacije puzanja, a proces rasterećenja pet puta je dulji od procesa puzanja. Iz Fondrkovih rezultata [31], ali i iz vlastitih eksperimentalnih rezultata prikazanih u poglavlju 5.2. primjećuje se da ovdje epruvete nisu opterećivane do loma.



Slika 38. Raspored uzoraka po zonama na poprečnom presjeku ljudskoga kortikalnoga koštanoga tkiva [30].



Slika 39. Dijagram ovisnosti deformacije o vremenu za ljudsko kortikalno koštano tkivo za slučaj puzanja s naknadnim rasterećivanjem s postepenim povećavanjem razine opterećenja [30].

6. ODREĐIVANJE PARAMETARA MATERIJALA

Za određivanje parametara materijala iz prethodno prikazanih eksperimentalnih podataka, u radu je primijenjena metoda najmanjih kvadrata odstupanja. Pritom je korišten program OriginPro koji je primijenjen u nizu radova [104]. Točnost aproksimacije definirana je veličinom R^2 (engl. *coefficient of determination*). R^2 je koeficijent determinacije koji predstavlja procjenu ukupne varijacije podataka aproksimiranih pomoću modela, a izračunava se na način da je

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{ost}}{SS_{ost} + SS_{model}}, \quad (71)$$

gdje je SS_{ost} suma kvadrata ostatka, a SS_{model} je suma kvadrata modela. Što je bolja aproksimacija eksperimentalnih vrijednosti modelom, vrijednost R^2 bliža je jedinici, a ako je jednaka jedinici onda je točnost aproksimacije 100 %.

Način određivanja parametara materijala primijenjen u ovom radu kombinacija je postupka određivanja parametara materijala iz raznih publikacija [34, 46, 63, 65, 105], ali prilagođeno za prezentirane modele viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja.

Određivanje parametara viskoelastičnog modela:

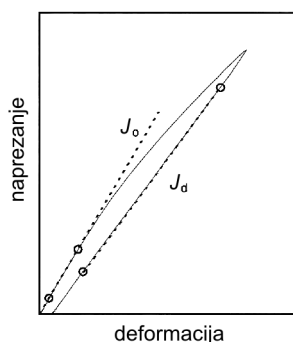
- Na kraju svakog perioda rasterećenja očitava se ukupna nepovratna deformacija čiji iznos predstavlja trajnu viskoplastičnu deformaciju $\varepsilon_{VP}(6t_0)$.
- Nadalje se ta vrijednost koristi kako bi se oduzela od ukupne deformacije za vrijeme rasterećenja ($\varepsilon_r(t) - \varepsilon_{VP}(6t_0)$), za različite razine opterećenja. Za linearno viskoelastičan model određuju se iz ovih podataka viskoelastični parametri J_1 i γ prema jednadžbi (66).
- Eliminiranje viskoplastične deformacije iz ukupne deformacije puzanja dobiva se oduzimanjem deformacije kod rasterećenja od vrijednosti deformacije puzanja na kraju procesa puzanja za različite razine opterećenja, prema izrazu:

$$\varepsilon_R(t) = \varepsilon_c(t_0) - \varepsilon_r(t). \quad (72)$$

Na osnovu ovih podataka za linearno viskoelastičan model određuje se parametar J_0 primjenom jednačbe (65).

Određivanje parametara oštećenja:

- Najprije se iz dijagrama ovisnosti omjera podatljivosti pri rasterećenju (J_d) i početne podatljivosti (J_0) o primijenjenom opterećenju odredi pri kojem naprezanju dolazi do akumuliranja oštećenja σ_{th}^D . Na slici 40 prikazana je podatljivost prilikom rasterećenja (J_d) i početna podatljivost (J_0).



Slika 40. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja o deformaciji za određivanje podatljivosti pri rasterećenju (J_d) i početne podatljivosti (J_0) [105]

- Aproksimacijska krivulja iz prethodne točke također ulazi u konstitutivan model, a iz tog dijagrama određuje se početna vrijednost varijable oštećenja w_0 pri početnoj graničnoj vrijednosti naprezanja kod kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja σ_{th}^D .
- Dijagram ovisnosti brzine deformacije o naprezanju također pokazuje pri kojem naprezanju dolazi do akumuliranja oštećenja. Uzimanjem srednje vrijednosti rezultata iz prethodne i ove točke bit će definirana granična vrijednost naprezanja pri kojoj dolazi do akumuliranja oštećenja.
- Iz dijagrama ovisnosti vremena puzanja potrebnog do loma o naprezanju koje je veće od određenog graničnog naprezanja pri kojem nastupa akumuliranje oštećenja, odrede se parametri oštećenja C , r i w_F , prema izrazu (12).

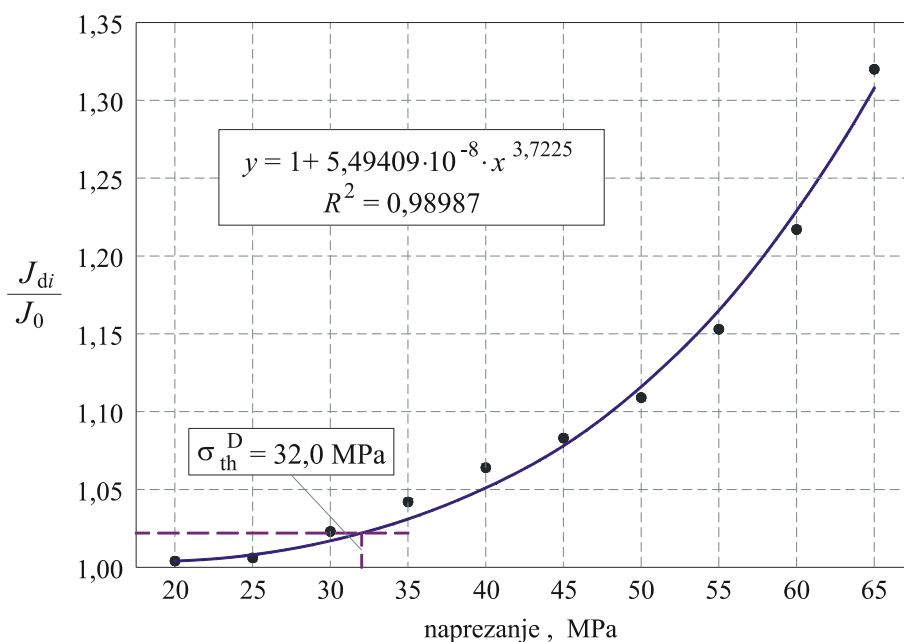
Određivanje viskoplastičnih parametara:

- Provedbom cikličkih eksperimenata puzanja s naknadnim rasterećenjem epruveta pri konstantnom opterećenju dobivaju se podaci o trajnoj deformaciji za svaku epruvetu ovisno o opterećenju. S tim podacima određuje se granična vrijednost

naprezanja pri kojoj dolazi do akumuliranja viskoplastične deformacije σ_{th}^{vp} te koristeći jednadžbu (22) određuju se viskoplastični parametri A , m i n . Bitno je naglasiti da nakon ciklusa puzanja slijedi rasterećenje koje je u provedenom eksperimentu pet puta dulje od ciklusa puzanja da bi se stabilizirala vrijednost trajne viskoplastične deformacije.

6.1. Parametri kompozitnoga materijala

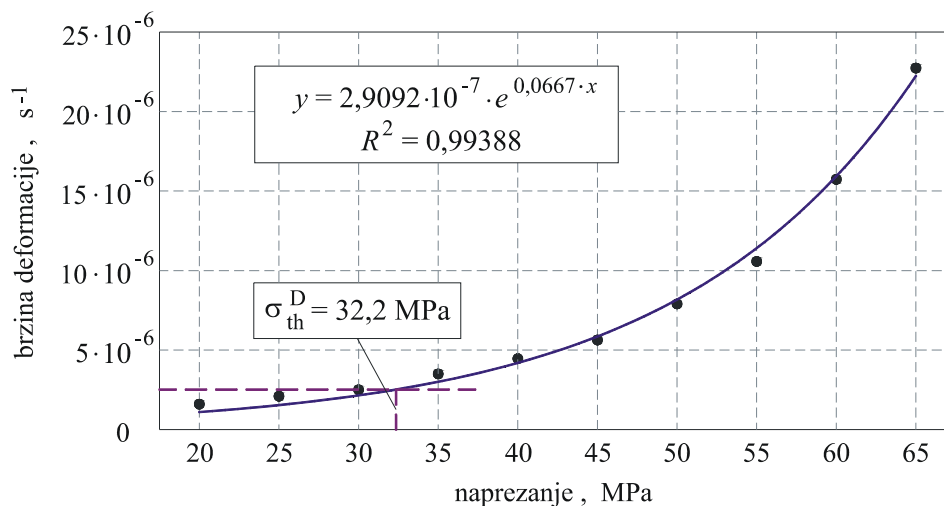
Na osnovu eksperimentalnih podataka cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećenjem prikazanog na slici 22 određen je omjer podatljivosti pri rasterećenju za svaki ciklus (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0). Iz tog omjera određeno je naprezanje pri kojem se počinje akumulirati oštećenje, što je prikazano slikom 41. Omjer podatljivosti izračunat iz eksperimentalnih vrijednosti aproksimiran je krivuljom, a točnost aproksimacije prikazana je veličinom R^2 .



Slika 41. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o napreznju za kompozitni materijal

Srednja vrijednost omjera podatljivosti na početnom linearnom dijelu od 20 do 30 MPa je 1,012, dok je standardna devijacija 0,01044. Zbroj ovih dviju vrijednosti od 1,02244 određuje horizontalni pravac. Sjecište ovog pravca i aproksimirane krivulje (slika 41) određuje napreznje početka akumuliranja oštećenja kao što je to definirano u [34]. Na taj način je dobiveno da pri napreznju od 32,0 MPa počinje akumuliranje oštećenja.

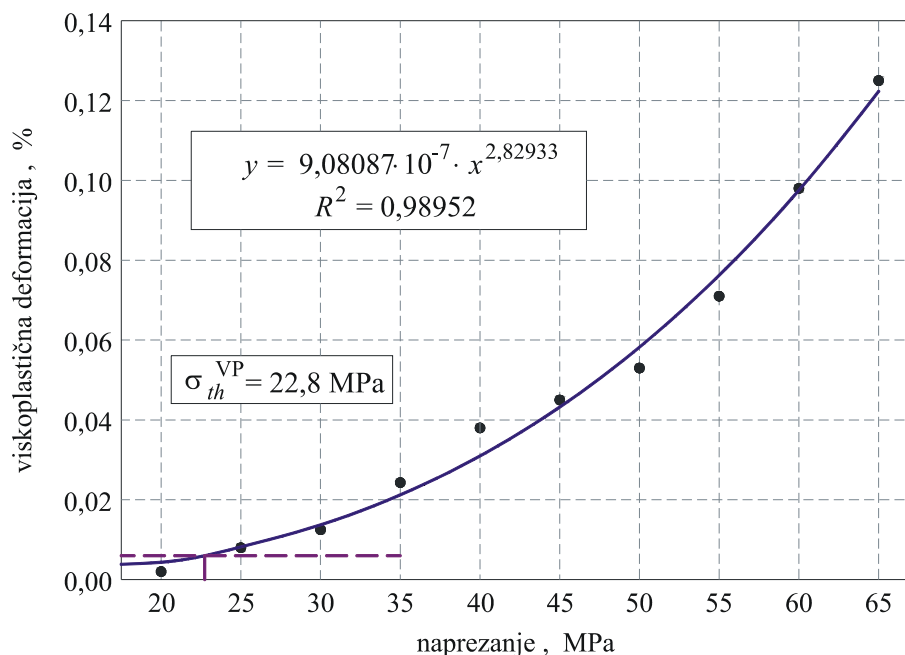
Osim toga, iz ovisnosti brzine deformacije o naprezanju, koja je određena iz dijagrama sa slike 22 za period od 30 do 60 sekundi (gdje je jednolika brzina deformacije), može se odrediti pri kojem naprezanju počinje akumuliranje oštećenja. Iz ove ovisnosti prikazane na slici 42, analognim postupkom kao na prethodnom dijagramu (slika 41) dolazi se do naprezanja početka akumuliranja oštećenja od 32,2 MPa.



Slika 42. Ovisnost brzine deformacije o naprezanju za kompozitni materijal

Uzimanjem srednje vrijednosti rezultata dobivenih sa slika 41 i 42, dobivena je granična vrijednost naprezanja pri kojoj dolazi do akumuliranja oštećenja u iznosu od 32,1 MPa.

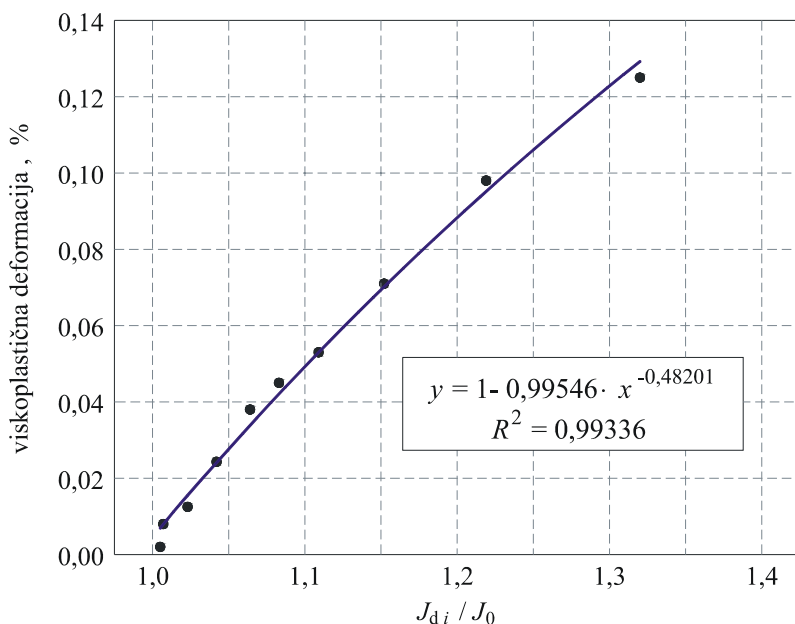
Na osnovu eksperimentalnih podataka cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem pokazanog na slici 22 lako se može odrediti iznos zaostale trajne viskoplastične deformacije na kraju procesa rasterećenja u ovisnosti o naprezanju. Ta ovisnost dijagramom je prikazana na slici 43, gdje su eksperimentalni podaci aproksimirani krivuljom, a točnost aproksimacije određena je veličinom R^2 .



Slika 43. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za kompozitni materijal

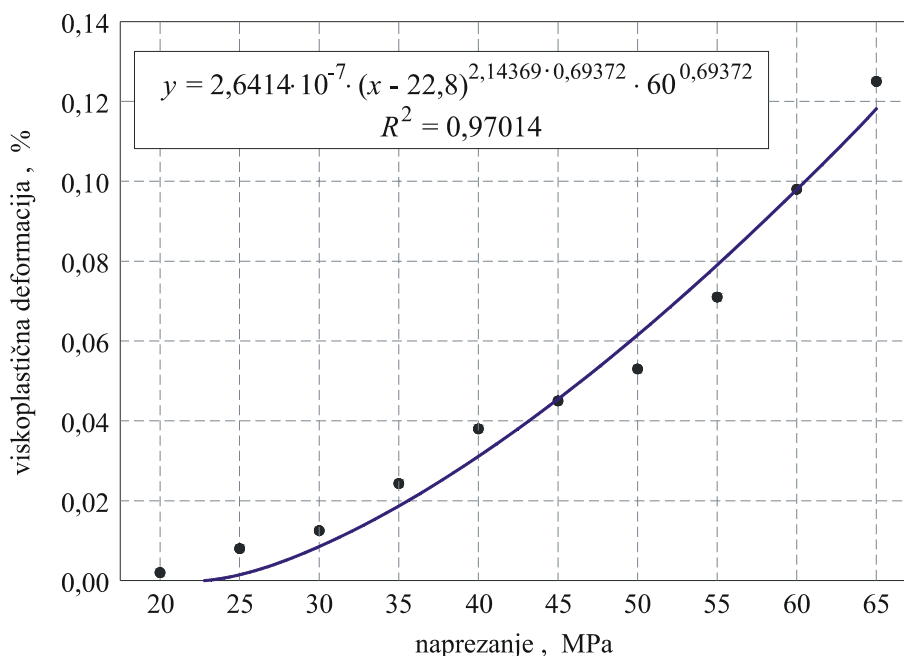
Sa slike 43 je vidljivo da je iznos viskoplastične deformacije za analizirane vrijednosti naprezanja jako mali ($\approx 0,12$ %). Analizom viskoplastičnih deformacija svih deset ispitnih uzoraka u periodu rasterećenja nakon provedenog ispitivanja puzanja pri 20 MPa, srednja vrijednost viskoplastične deformacije je 0,002 %, a standardna devijacija 0,004 %. Zbroj srednje vrijednosti i standardne devijacije određuje horizontalni pravac $y = 0,006$ %, gdje je y vrijednost viskoplastične deformacije na ordinati na slici 43. Sjecište ovog pravca i aproksimirane krivulje predstavlja naprezanje početka akumuliranja viskoplastične deformacije [34], koje sa slike 43 očitano ima iznos od 22,8 MPa.

Slikom 44 prikazana je ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju i početne podatljivosti. Ova ovisnost aproksimirana je prikazanom krivuljom.



Slika 44. Ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) za kompozitni materijal

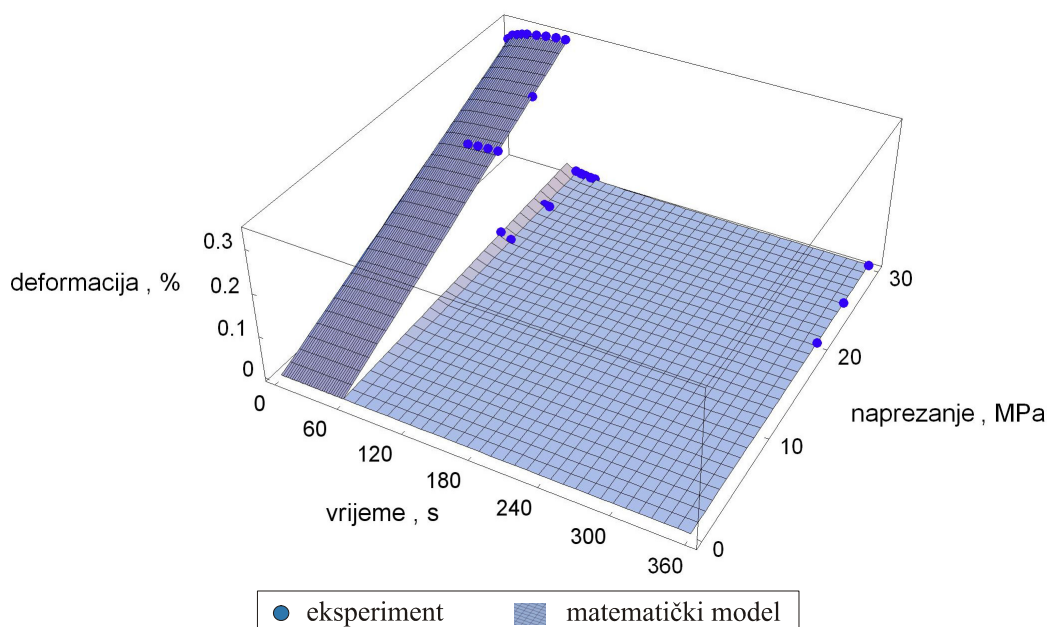
Određivanje viskoplastičnih parametara provedeno je na osnovu ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem pri promjenjivom opterećenju i to prema izrazu (22) za viskoplastičnu deformaciju pri rasterećenju. Viskoplastična deformacija u ovisnosti o naprezanju prikazana je na slici 45.



Slika 45. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju provedenom u procesu puzanja za kompozitni materijal

Viskoelastični parametri materijala određeni su na temelju eksperimentalnih podataka koji odgovaraju naprezanjima do graničnog naprezanja σ_{th}^D kod kojeg dolazi do akumuliranja

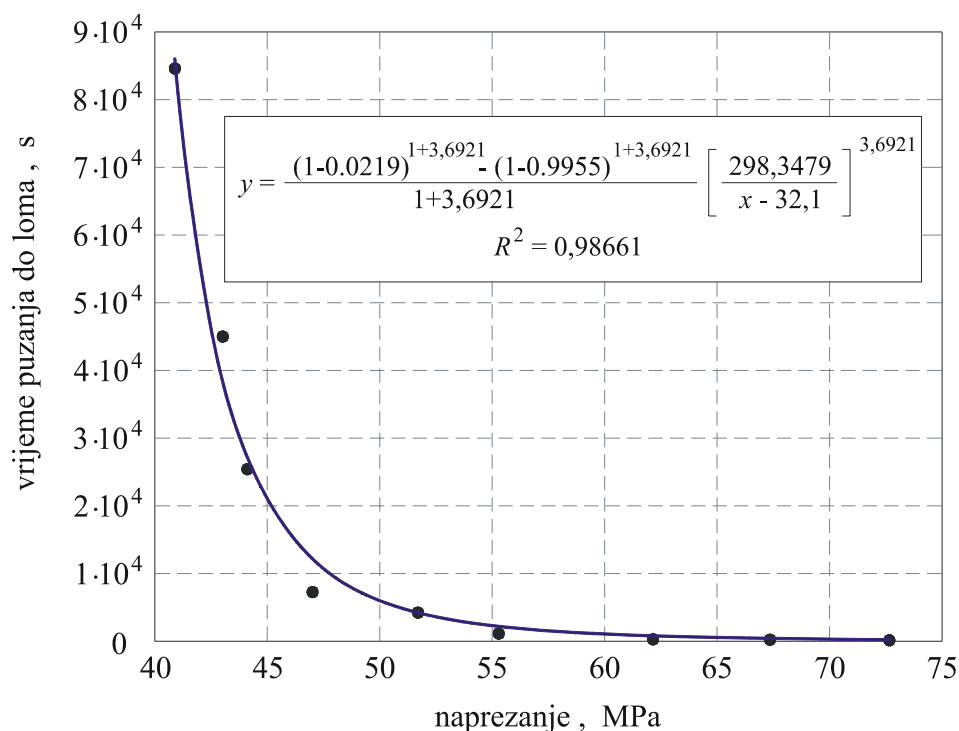
oštećenja. Kako su u tom području naprezanja prisutne i viskoplastične deformacije, primjenom izraza (72), odnosno oduzimanjem viskoplastične deformacije od ukupne deformacije dobivene su vrijednosti viskoelastičnih deformacija. Za tako određene vrijednosti viskoelastičnih deformacija provedena je aproksimacija što je prikazano na slici 46, gdje su točkama prikazani eksperimentalni podaci.



Slika 46. Ovisnost viskoelastične deformacije o vremenu i naprezanju za kompozitni materijal

Aproksimacija za određivanje viskoelastičnih parametara J_1 i γ provedena je izrazom (66) za slučaj rasterećenja, dok je za J_0 primijenjen izraz (65) za slučaj puzanja. Dobiveni viskoelastični parametri prikazani su u tablici 4.

Određivanje parametara oštećenja provedeno je prema izrazu (12). U početnom trenutku akumuliranja oštećenja za $\sigma_{th}^D = 32,1$ MPa, oštećenje w_0 nije jednako nuli već je $w_0 = 0,02195$, što se može vidjeti iz dijagrama na slici 41. Dijagram ovisnosti vremena puzanja do loma o naprezanju prikazan je na slici 47, gdje su točkama prikazane eksperimentalne vrijednosti te aproksimacijska krivulja prema izrazu (12).



Slika 47. Ovisnost vremena puzanja do loma o naprezanju za kompozitni materijal

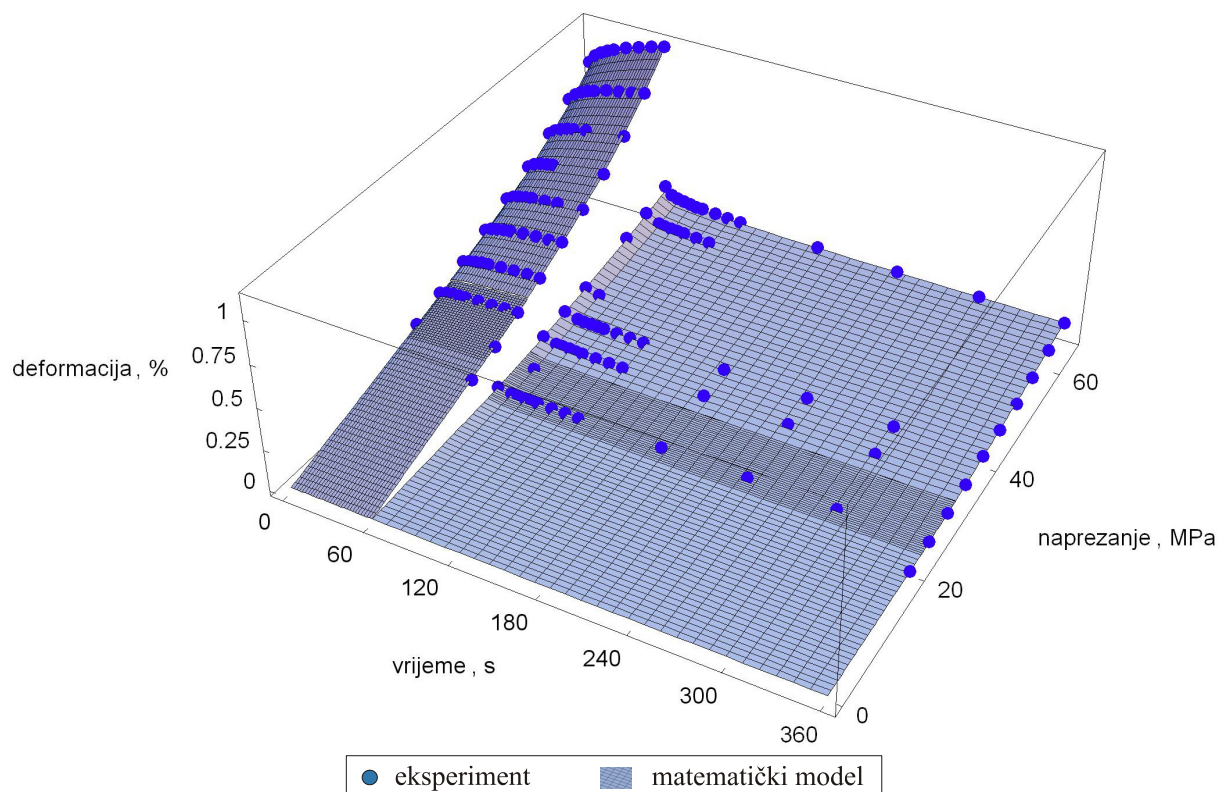
Nadalje, u tablici 4 su prikazani svi izračunati parametri konstitutivnog modela za analizirani kompozitni materijal.

Tablica 4. Tablični prikaz parametara za kompozitni materijal

Parametri		Iznos	Jedinica	R^2
viskoelastičnosti	J_0	$1,02594 \cdot 10^{-4}$	MPa^{-1}	0,99061
	J_1	$2,35332 \cdot 10^{-6}$	$\text{MPa}^{-1} \cdot \text{s}^{-\gamma}$	0,87637
	γ	0,39958	-	
oštećenja	σ_{th}^D	32,1	MPa	0,99187
	C	298,34793	$\text{MPa} \cdot \text{s}^{-r}$	0,98661
	r	3,6921	-	
	w_F	0,99553	-	
	w_0	0,02195	-	0,99187
	a	$5,49409 \cdot 10^{-8}$	-	0,98987
	b	3,7225	-	
viskoplastičnosti	σ_{th}^{VP}	22,8	MPa	0,98952
	A	$2,6414 \cdot 10^{-7}$	$\text{MPa}^{-mn} \cdot \text{s}^{-n}$	0,97014
	m	2,14369	-	
	n	0,69372	-	

Ako se izračunati parametri materijala uvrste u pripadne jednačbe dobit će se funkcija deformacije u ovisnosti o vremenu i naprezanju koja je predstavljena plohom na slici 48. Važno je istaknuti dobro podudaranje eksperimentalnih i aproksimiranih vrijednosti koji iza

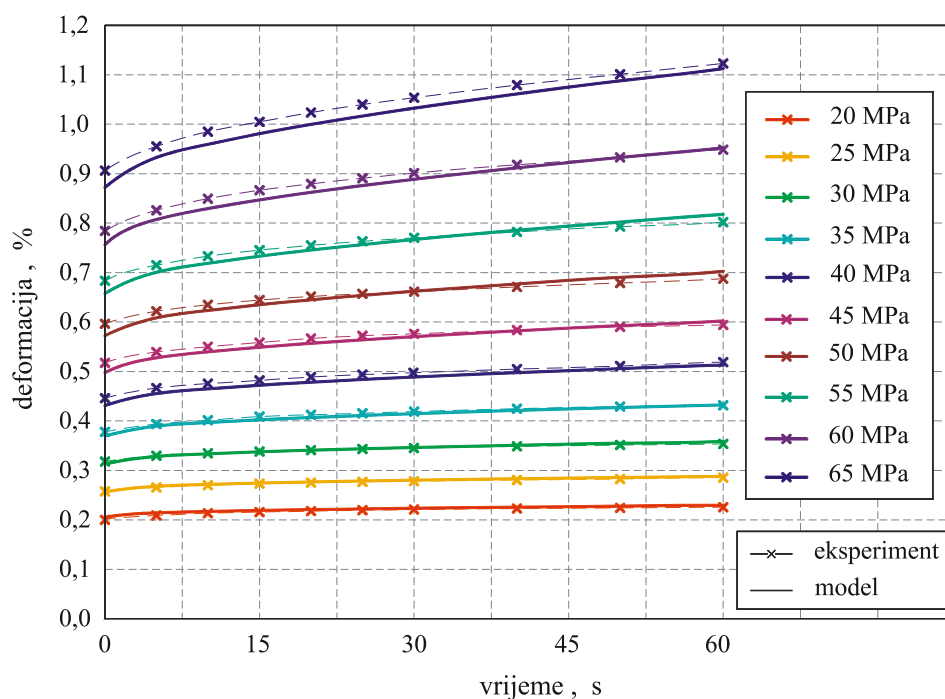
sebe imaju fizikalnu pozadinu. Na slici je prikazana funkcija deformacije za slučaj puzanja (od 0 do 60 s), kao i za slučaj rasterećenja (od 60 do 360 s).



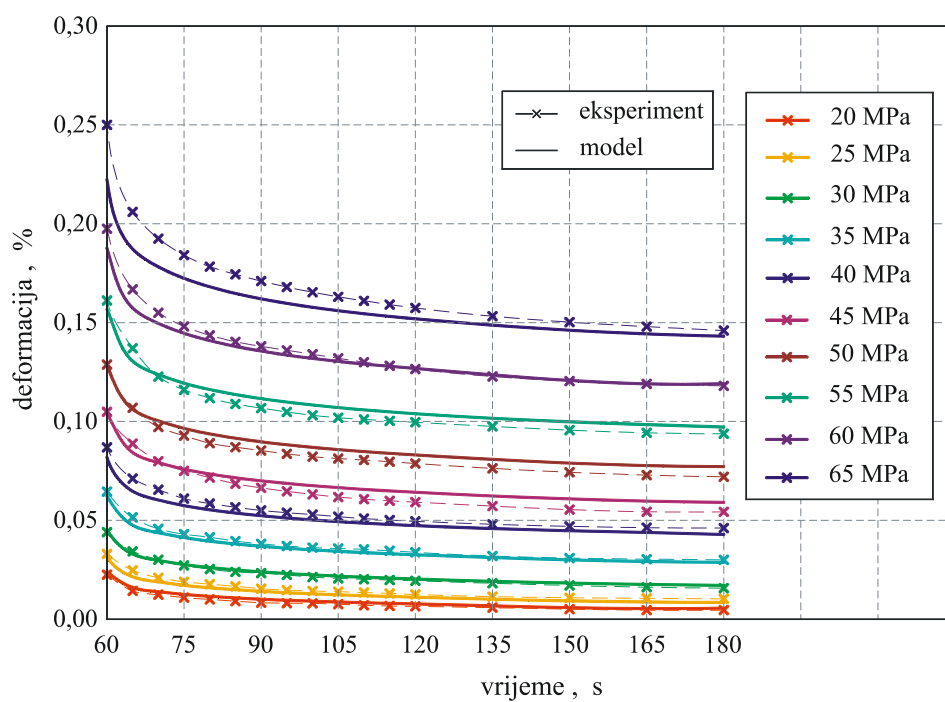
Slika 48. Ovisnost deformacije o vremenu i naprezanju za kompozitni materijal

Na slici 49 dana je usporedba eksperimentalnih rezultata za deformaciju puzanja s rezultatima modela, a na slici 50 su prikazana odstupanja eksperimentalnih vrijednosti od modela pri rasterećenju. Primjećuje se da je odstupanje veće u zadnjim ciklusima, neposredno prije loma kada je utjecaj oštećenja najveći.

Iz prikazanih rezultata, slijedi zaključak da je predloženi konstitutivni model primjenljiv za analizirani kompozitni materijal. Maksimalno odstupanje modela od eksperimentalnih rezultata je 7,7 %



Slika 49. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju puzanja s rezultatima model za kompozitni materijal



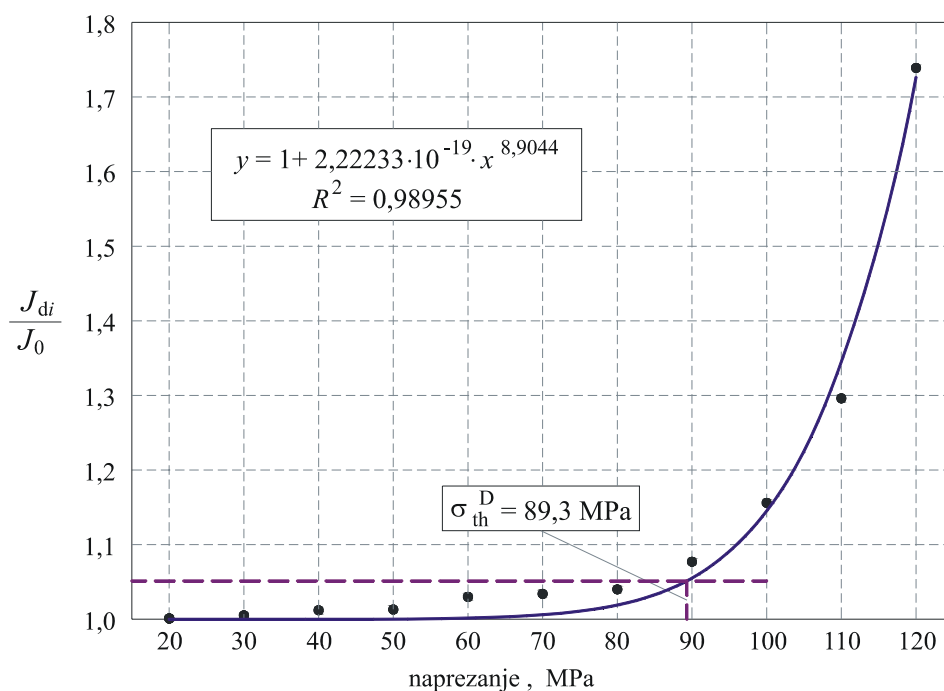
Slika 50. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju rasterećenja s rezultatima model za kompozitni materijal

Slijedeći cilj ovog rada bio je istražiti da li je predloženi konstitutivni model primjenjiv za kortikalno koštano tkivo?

6.2. Parametri govedega kortikalnoga koštanoga tkiva

Kao što je rečeno u uvodu rada, točnost parametara materijala važna je za točnost numeričke simulacije. Kako je struktura bioloških materijala heterogena njihovo ponašanje je izrazito kompleksno. Određivanje parametara materijala bioloških tkiva je teško i *in vitro* eksperimenti pružaju samo opća svojstva koja se temelje na ograničenom broju uzoraka.

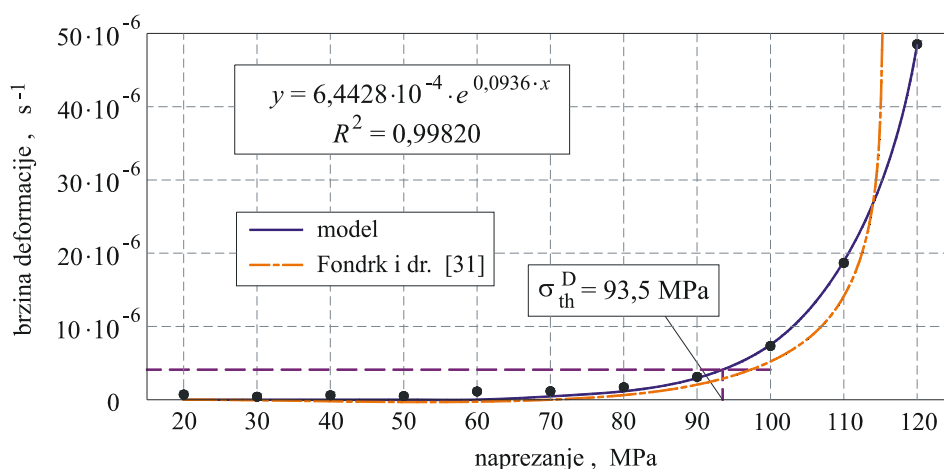
Na osnovu uprosječenih eksperimentalnih podataka cikličkog istraživanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem goveđe kosti pokazanog na slici 35, došlo se do omjera podatljivosti pri rasterećenju za svaki ciklus (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0). Iz tog omjera određeno je naprezanje pri kojem se počinje akumulirati oštećenje, što je prikazano slikom 51. Omjer podatljivosti izračunat iz eksperimentalnih vrijednosti aproksimiran je krivuljom, a točnost aproksimacije prikazana je veličinom R^2 .



Slika 51. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o naprezanju govedega kortikalnoga koštanoga tkiva

Srednja vrijednost omjera podatljivosti sa slike 51 na početnom linearnom dijelu od 20 do 90 MPa je 1,0265, dok je standardna devijacija 0,0248. Zbroj ovih dviju vrijednosti od 1,0513 određuje horizontalni pravac, prikazan na slici 51. Sjecište ovog pravca i aproksimirane krivulje (slika 51) definira naprezanje pri kojem se počinje akumulirati oštećenje u materijalu [34]. Na taj način pri naprezanju od 89,3 MPa počinje akumuliranje oštećenja u goveđoj kortikalnoj kosti.

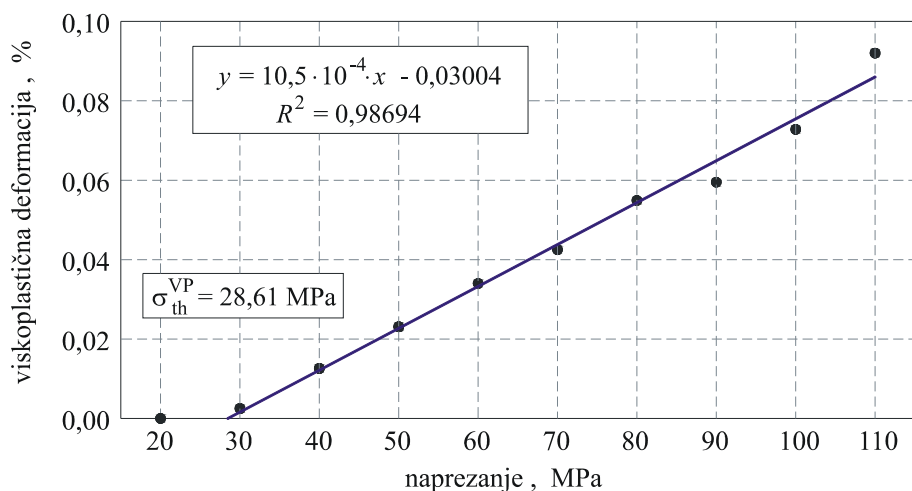
Kao što je pokazano za slučaj kompozitnog materijala, iz ovisnosti brzine deformacija o naprezanju, koje je određeno iz dijagrama sa slike 35 za period od 30 do 60 sekundi, također se može odrediti pri kojem naprezanju počinje akumuliranje oštećenja. Iz ove ovisnosti prikazane na slici 52, analognim postupkom kao na prethodnom dijagramu dolazi se do naprezanja pri kojem dolazi do akumuliranja oštećenja u iznosu od 93,5 MPa. Na slici 52 prikazana je usporedba eksperimentalnih vrijednosti dobivenih u ovom radu s rezultatima istraživanja iz literature [31]. Fondrk je u svojoj publikaciji postavio granicu brzine deformacije od 10^{-5} s^{-1} kod koje dolazi do akumuliranja oštećenja i time za graničnu vrijednost naprezanja dobio 107 MPa.



Slika 52. Ovisnost brzine deformacija o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo

Analogno opisanom za kompozitni materijal i ovdje je granična vrijednost naprezanja pri kojoj dolazi do akumuliranja oštećenja u iznosu od 91,4 MPa određena uzimanjem srednje vrijednosti rezultata dobivenih s dijagrama prikazanih na slikama 51 i 52.

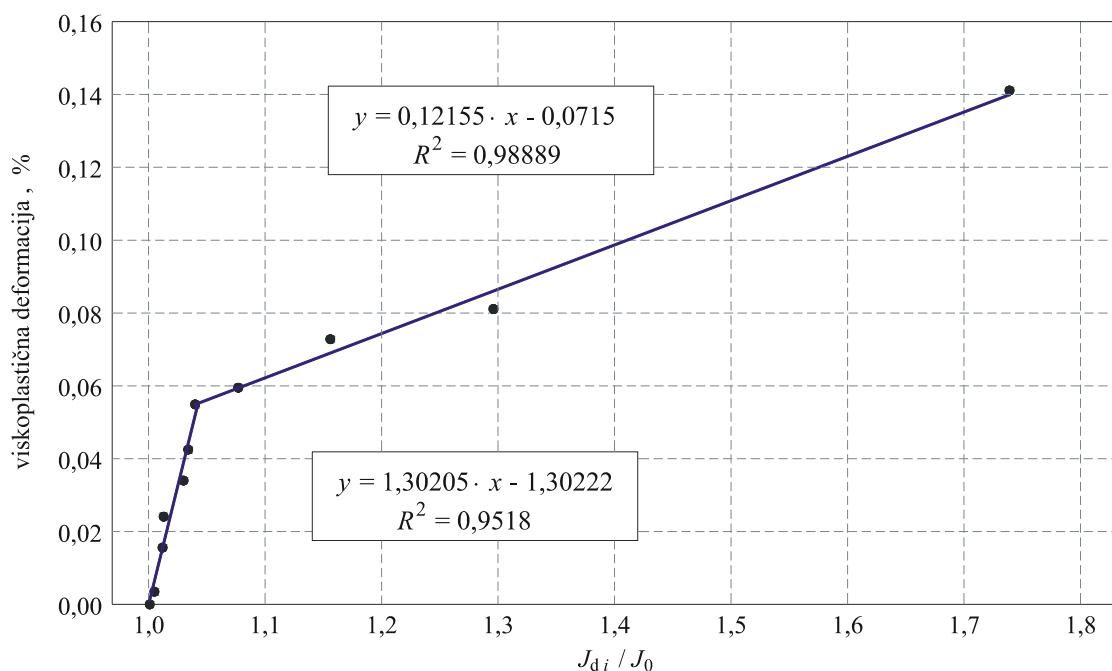
Na temelju uprosječenih eksperimentalnih podataka cikličkog ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem pokazanog na slici 35 lako se može odrediti iznos zaostale trajne viskoplastične deformacije na kraju procesa rasterećenja u ovisnosti o naprezanju. Ta ovisnost je prikazana dijagramom na slici 53, gdje su eksperimentalni podaci aproksimirani krivuljom, a točnost aproksimacije određena veličinom R^2 .



Slika 53. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo

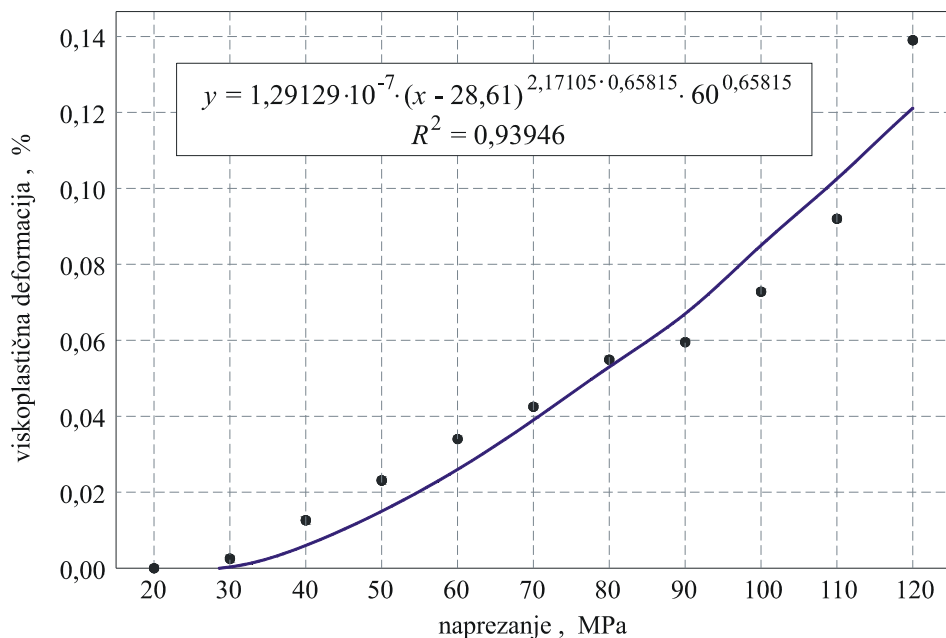
Na slici 53 eksperimentalne vrijednosti za viskoplastičnu deformaciju u funkciji napreznja aproksimirane su pravcem. Sjecište ovog pravca i osi apscise predstavlja naprezanje početka akumuliranja viskoplastične deformacije [41]. Sa slike 53 ovo naprezanje iznosi 28,6 MPa.

Ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju i početne podatljivosti za goveđu kortikalnu kost prikazana je na slici 54. Kao što se vidi sa slike, prikazana ovisnost može se aproksimirati bilinearno. Pritom je sjecište ova dva pravca u točki početka akumuliranja oštećenja. Isto ovakva ovisnost dobivena je i u analizi kompozitnog materijala, samo što se oštećenje kod kompozitnog materijala počinje akumulirati puno ranije.



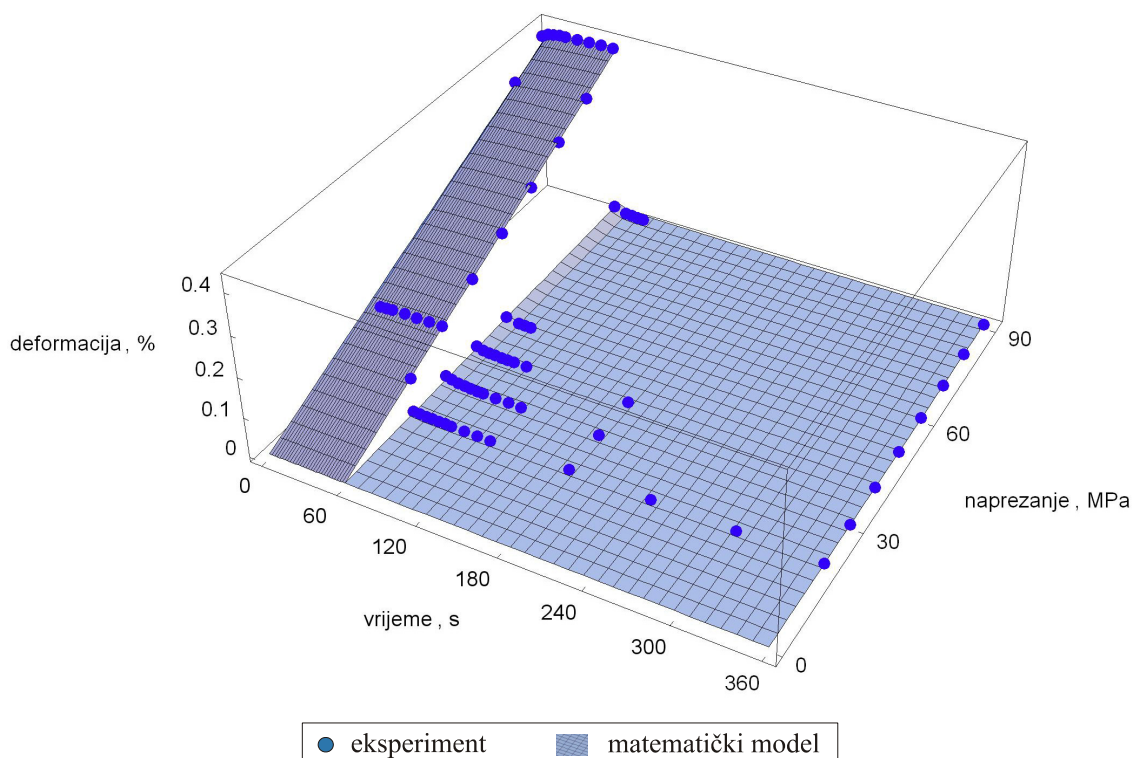
Slika 54. Ovisnost viskoplastične deformacije o omjeru podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) za goveđe kortikalno koštano tkivo

Određivanje viskoplastičnih parametara provodi se na osnovu ispitivanja cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem pri promjenjivom opterećenju i to prema izrazu (22) za viskoplastičnu deformaciju pri rasterećenju. Eksperimentalni podaci prikazani točkama na slici 55 aproksimirani su krivuljom čija je jednadžba prikazana na slici.



Slika 55. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za slučaj puzanja za goveđe kortikalno koštano tkivo

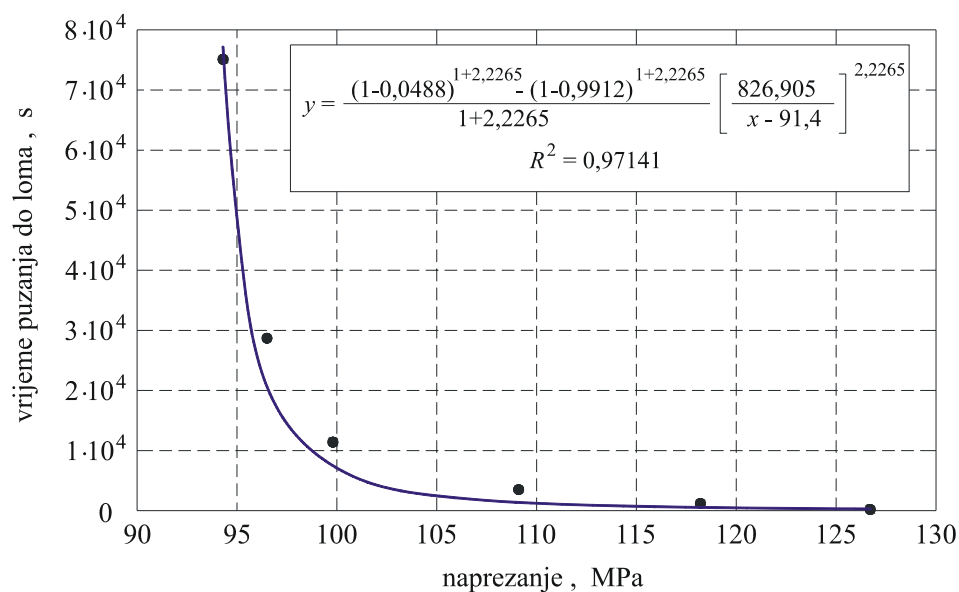
Viskoelastični parametri materijala određeni su iz eksperimentalnih podataka za naprezanja manja od graničnog σ_{th}^D kod kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja ($\sigma < \sigma_{th}^D = 91,4$ MPa). Pritom je primjenom izraza (72) od ukupne deformacije oduzet viskoplastični dio te je dobivena viskoelastična deformacija. Za tako određene izraze viskoelastičnih deformacija pripadna aproksimacija prikazana je na slici 56.



Slika 56. Ovisnost viskoelastične deformacije o vremenu i naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo

Aproksimacija za određivanje viskoelastičnih parametara provedena je primjenom izraza (65) za slučaj puzanja, dok je za slučaj rasterećenja korišten izraz (66). Dobiveni viskoelastični parametri tablično su prikazani u tablici 5.

Kao i za slučaj kompozitnog materijala i ovdje je određivanje parametara oštećenja provedeno prema izrazu (12). U početnom trenutku akumuliranja oštećenja za $\sigma_{th}^D = 91,4$ MPa, oštećenje w_0 nije jednako nuli već je $w_0 = 0,0488$, što se može vidjeti iz dijagrama na slici 51. Dijagram ovisnosti vremena puzanja do loma o naprezanju prikazan je na slici 57, gdje su točkama prikazane eksperimentalne vrijednosti te aproksimacijska krivulja prema izrazu (12). Prikaz parametara materijala za goveđe kortikalno koštano tkivo dan je u tablici 5.

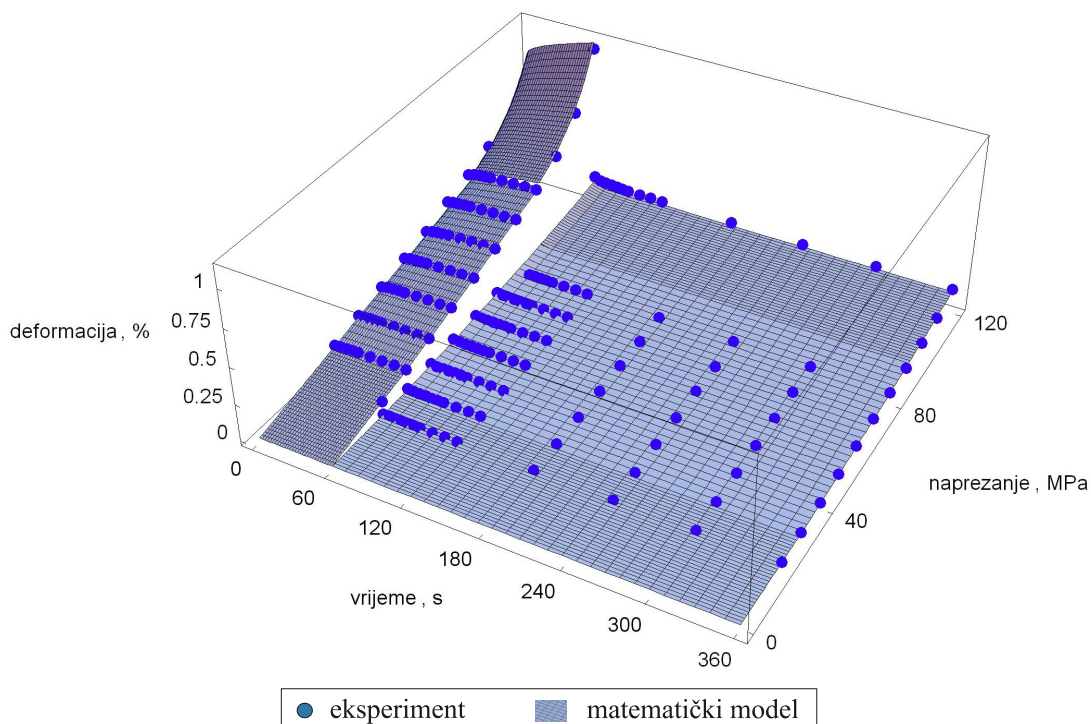


Slika 57. Ovisnost vremena puzanja do loma o naprezanju za goveđe kortikalno koštano tkivo

Tablica 5. Tablični prikaz parametara materijala za goveđe kortikalno koštano tkivo

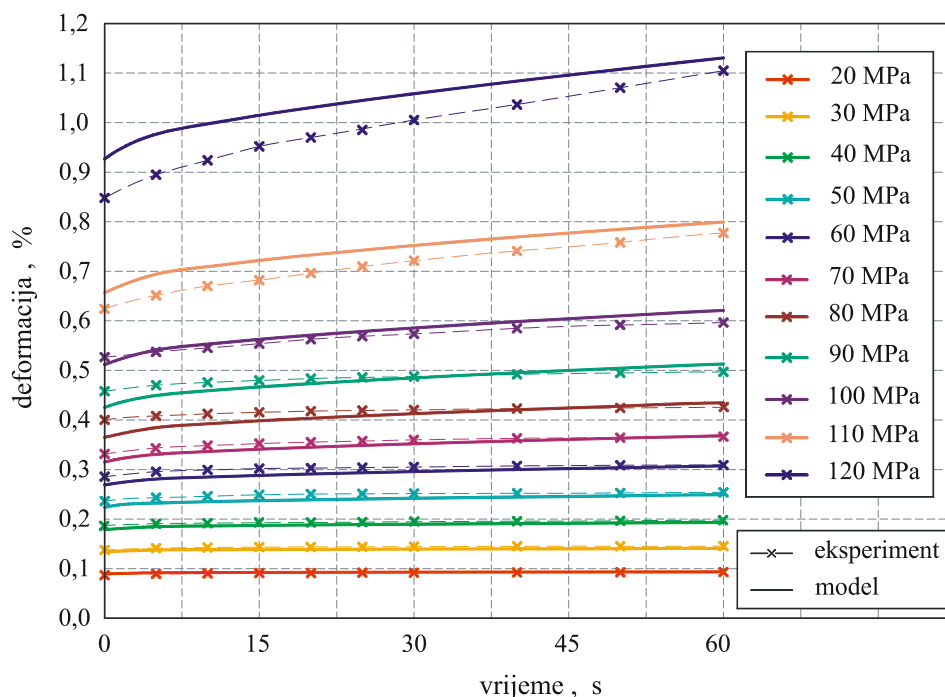
Parametri		Iznos	Jedinica	R^2
viskoelastičnosti	J_0	$4,47491 \cdot 10^{-5}$	MPa^{-1}	0,99654
	J_1	$7,72326 \cdot 10^{-7}$	$\text{MPa}^{-1} \cdot \text{s}^{-\gamma}$	0,81872
	γ	0,23348	-	
oštećenja	σ_{th}^D	91,4	MPa	0,99408
	C	826,905	$\text{MPa} \cdot \text{s}^{-r}$	0,97141
	r	2,2265	-	
	w_F	0,9912	-	
	w_0	0,0488	-	0,99408
	a	$2,22233 \cdot 10^{-19}$	-	0,98955
	b	8,9044	-	
viskoplastičnosti	σ_{th}^{VP}	28,61	MPa	0,99676
	A	$1,29129 \cdot 10^{-7}$	$\text{MPa}^{-mn} \cdot \text{s}^{-n}$	0,93946
	m	2,17105	-	
	n	0,65815	-	

Uvrste li se parametri materijala iz tablice 5 u pripadne jednačbe, dobiva se funkcija deformacije u ovisnosti o vremenu i naprezanju koja je predstavljena plovom na slici 58. Ovdje je potrebno istaknuti dobro podudaranje eksperimentalnih vrijednosti prikazanih točkama i matematičkog (konstitutivnog) modela s pripadnim parametrima materijala. Na ovoj slici prikazana je raspodjela deformacije za slučaj puzanja (od 0 do 60 s), kao i za slučaj rasterećenja (od 60 do 360 s).

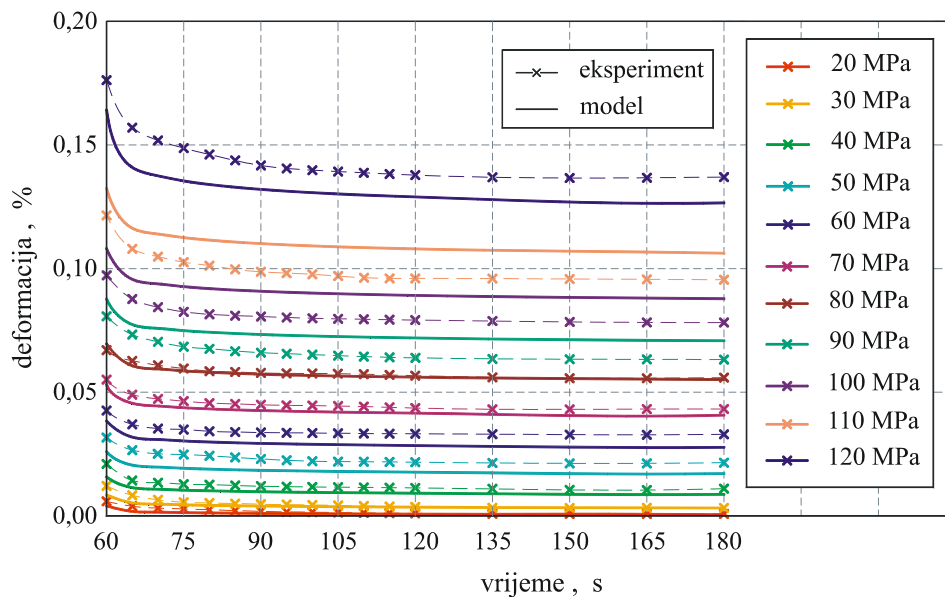


Slika 58. Ovisnost deformacije o vremenu i naprezanju za govede kortikalno koštano tkivo

Usporedba eksperimentalnih rezultata za deformaciju puzanja, odnosno deformaciju rasterećenja prikazana je na slici 59, odnosno 60. Kao i za slučaj kompozitnog materijala, i ovdje se primjećuje da je odstupanje veće u zadnjim ciklusima neposredno prije loma epruvete kada je utjecaj oštećenja najveći.



Slika 59. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju puzanja s rezultatima modela za govede kortikalno koštano tkivo



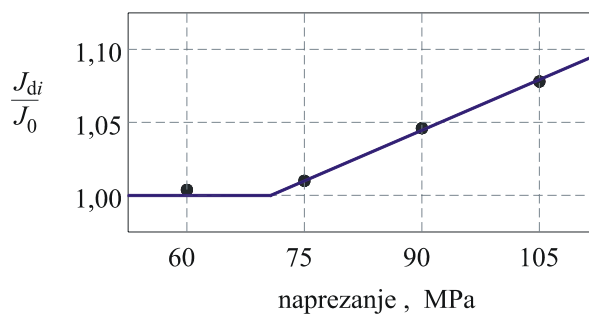
Slika 60. Usporedba eksperimentalnih vrijednosti za deformaciju rasterećenja s rezultatima modela za goveđe kortikalno koštano tkivo

Ovdje je potrebno naglasiti da je na dijagramima prikazanim na slici 59 i 60 vidljivo veće odstupanje modela od eksperimentalnih vrijednosti u maksimalnom iznosu od 12,3 %, nego kod kompozitnog materijala. To se može objasniti i većom greškom prilikom aproksimiranja eksperimentalnih rezultata kako bi se pronašli parametri materijala. R^2 nije bio toliko blizu 1 kao za slučaj kompozitnog materijala. Osim toga, može se reći da je za slučaj goveđeg kortikalnog koštanog tkiva odstupanje veće jer je ispitan manji broj epruveta nego za slučaj kompozitnog materijala. No, ipak jedan od najvećih razloga za odstupanje leži u nehomogenosti strukture koštanog tkiva, što kod kompozitnog materijala nije u tolikoj mjeri izraženo. Svaka krivulja deformacija-vrijeme pojedinog ciklusa opterećenja nosi neka odstupanja, neka negativna, neka pozitivna, neka manja, a neka veća, ali globalno gledajući prikazani konstitutivni model dovoljno točno opisuje analizirani proces deformiranja kortikalnoga koštanoga tkiva. Razlog navedenih odstupanja je što su tijekom provođenja eksperimenta analizirani prirasti naprezanja bili dovoljno mali, tako da konstitutivni model daje dobru aproksimaciju eksperimentalnih rezultata u cijelom području sve do loma kosti.

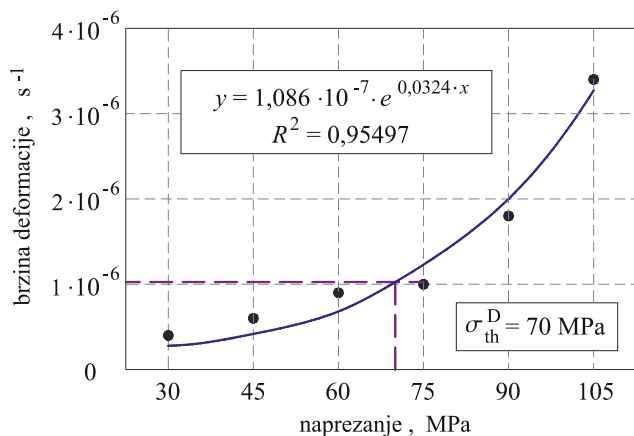
6.3. Parametri ljudskoga kortikalnoga koštanoga tkiva

Cilj rada bio je nadalje pokazati da se eksperimentalni podaci za ljudsko kortikalno koštano tkivo prikazani u literaturi mogu dovoljno dobro, uz određene male modifikacije konstitutivnog modela, opisati istim relacijama koje su primijenjene za modeliranje analiziranog kompozitnog materijala, kao i goveđe kosti.

Iz Melnisovih eksperimentalnih rezultata [30] prikazanih u odjeljku 5.3. na slici 40, određeni su parametri materijala ljudskoga kortikalnoga koštanoga tkiva. Najprije je određeno naprezanje pri kojem dolazi do akumuliranja oštećenja, na način da je analizirana promjena podatljivosti epruvete te brzina deformacije u ovisnosti o naprezanju. Analognom analizom kao i u prethodnim odlomcima za slučaj kompozitnog materijala i goveđe kosti određena je granična vrijednost naprezanja pri kojoj dolazi do akumuliranja oštećenja u iznosu od 70,5 MPa prema slici 61, te 70 MPa prema slici 62. Time je usvojena granična vrijednost za akumuliranje oštećenja od 70,25 MPa, što se dobro podudara s granicom akumuliranja oštećenja određenoj u literaturi [31]. U toj je publikaciji Fondrk sa suradnicima istražio da je početak akumuliranja oštećenja za ljudsko kortikalno koštano tkivo između 68 i 79 MPa. U tim granicama je i početak akumuliranja oštećenja u Melnisovim eksperimentima.



Slika 61. Ovisnost omjera podatljivosti pri rasterećenju u svakom ciklusu (J_{di}) i početne podatljivosti (J_0) o naprezanju za ljudsko kortikalno koštano tkivo



Slika 62. Ovisnost brzine deformacije o naprezanju za ljudsko kortikalno koštano tkivo

Kako ispitivanja puzanja do loma u ovoj literaturi nisu provedena time su pojedini članovi parametara oštećenja ostali nepoznati, što je uzrokovalo zanemarivanje određenih članova u konstitutivnoj jednadžbi. Na taj način je akumuliranje oštećenja prikazano bilinearnim modelom kao što je to napravljeno u [105]. Na slici 61 prikazan je ovaj bilinearni model gdje je omjer podatljivosti dan u obliku

$$K_T(\sigma) = J_d/J_0 = 1 + k_d \langle \sigma - \sigma_{th}^D \rangle = \begin{cases} 1 & \text{za } \sigma < \sigma_{th}^D \\ 1 + k_d (\sigma - \sigma_{th}^D) & \text{za } \sigma > \sigma_{th}^D \end{cases}, \quad (73)$$

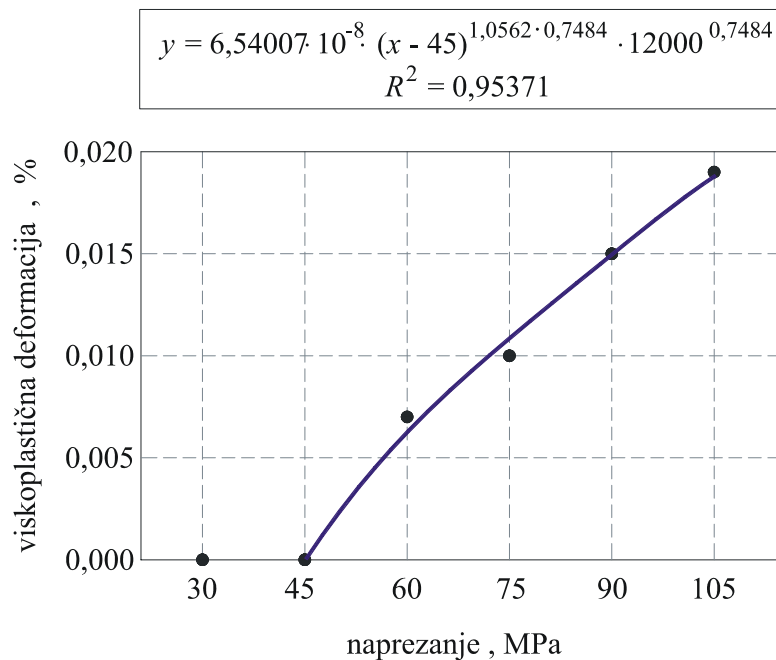
gdje je k_d parametar oštećenja materijala. Zanemarivanjem članova za akumuliranje oštećenja u jednadžbama (69) i (70) koji znatno ne utječu na rješenje, ove jednadžbe mogu se pojednostavniti tako da je slučaj puzanja predstavljen jednadžbom (74), a slučaj rasterećenja jednadžbom (75) u obliku

$$(\varepsilon_{VE}^D)_c = K_T [J_0 \sigma + J_1 \sigma t^\gamma] \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (74)$$

$$(\varepsilon_{VE}^D)_r = J_1 \sigma \cdot K_T [t^\gamma - (t - t_0)^\gamma] \quad \text{za } t > t_0. \quad (75)$$

U istom obliku jednadžbe (74) i (75) koriste se u literaturi [105].

Analizom viskoplastične deformacije iz preuzetih podataka uočljivo je da nakon 45 MPa počinje akumulacija viskoplastične deformacije, što je prikazano slikom 63. Time su viskoplastični parametri određeni aproksimacijskom funkcijom (22) prikazanom na slici 64.



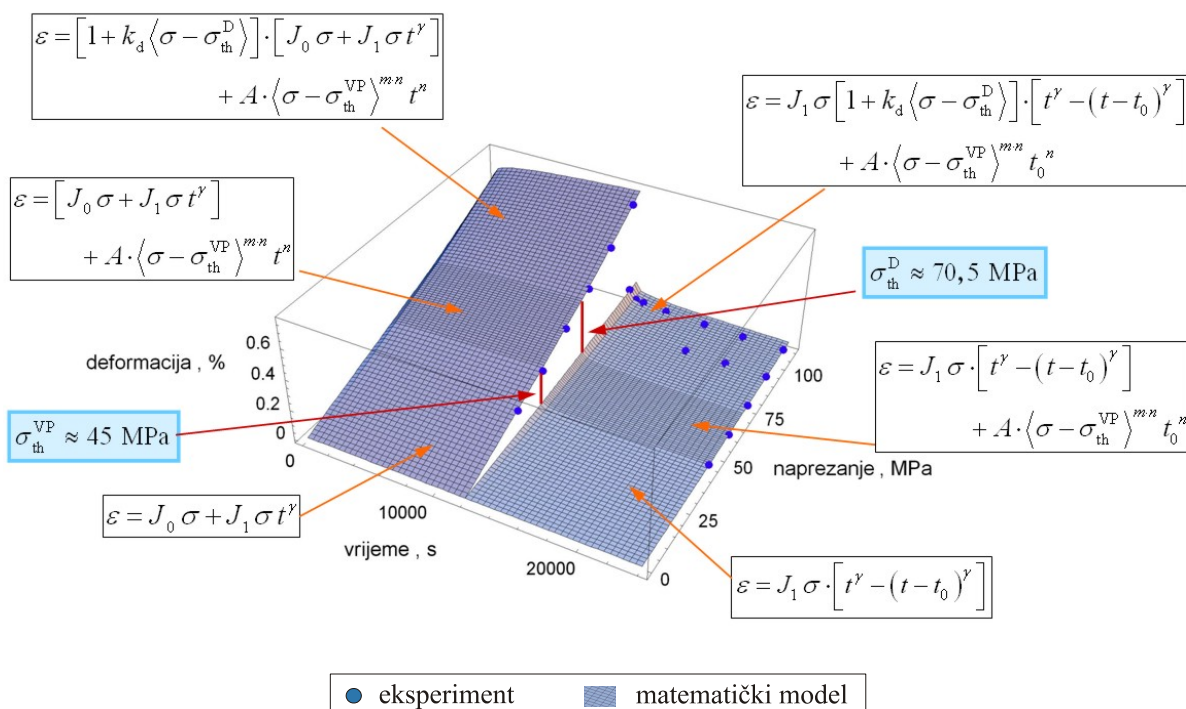
Slika 63. Ovisnost viskoplastične deformacije o naprezanju za ljudsko kortiklano koštano tkivo

Viskoelastični parametri dobiveni su na identičan način kao što je to opisano u prethodnim odlomcima, a prezentirani su u tablici 6. Osim toga, u tablici 6 su prikazani svi ostali parametri materijala za ljudsko kortikalno koštano tkivo dobiveni na osnovi eksperimentalnih podataka preuzetih iz literature [30].

Tablica 6. Tablični prikaz parametara materijala za ljudsko kortikalno koštano tkivo

Parametri	Iznos	Jedinica	R^2
viskoelastičnosti	J_0	$5,2217 \cdot 10^{-5}$	MPa^{-1}
	J_1	$8,61449 \cdot 10^{-7}$	$\text{MPa}^{-1} \cdot \text{s}^{-\gamma}$
	γ	0,27124	-
oštećenja	$\sigma_{\text{th}}^{\text{D}}$	70,25	MPa
	k_d	0,002314	-
viskoplastičnosti	$\sigma_{\text{th}}^{\text{VP}}$	45	MPa
	A	$6,54007 \cdot 10^{-8}$	$\text{MPa}^{-mn} \cdot \text{s}^{-n}$
	m	1,05615	-
	n	0,74835	-

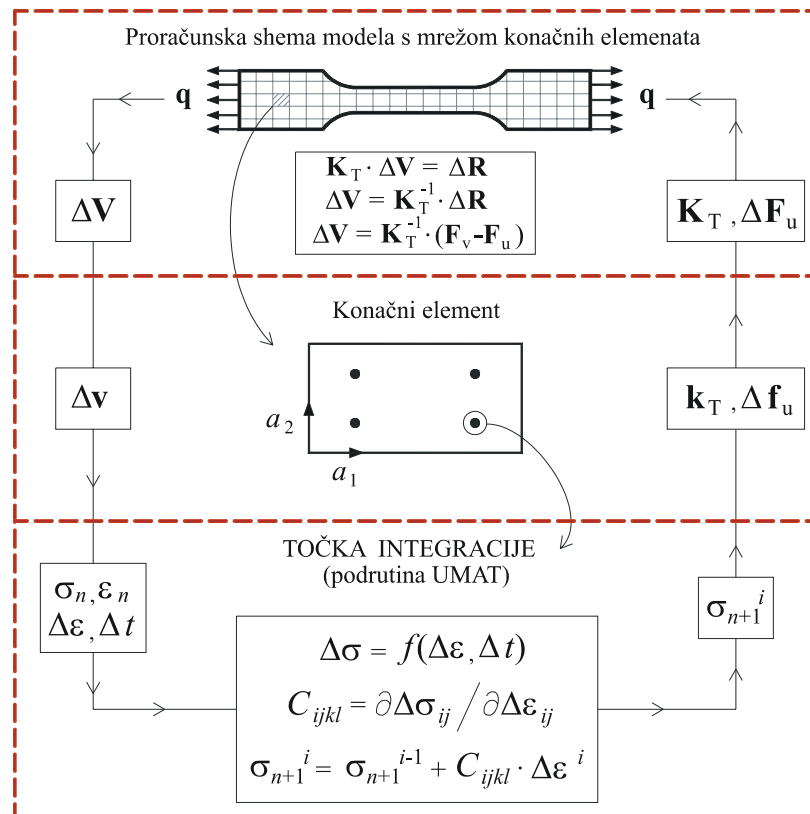
Ako se parametri materijala prikazani u tablici 6 uvrste u jednačbe (21), (22), (74) i (75) dobiva se deformacija puzanja odnosno rasterećenja u ovisnosti o naprezanju i vremenu što je grafički prikazano na slici 64. Na slici su točkama prikazane eksperimentalne vrijednosti iz [30], a funkcijom matematički (konstitutivan) model. Ovisno o primijenjenom opterećenju prikazana je i odgovarajuća konstitutivna relacija u koju je za dobivanje deformacije potrebno uvrstiti parametre materijala prikazane u tablici 6.



Slika 64. Deformacija puzanja i rasterećenja u ovisnosti o naprezanju i vremenu za ljudsko kortikalno koštano tkivo

7. NUMERIČKA FORMULACIJA I IMPLEMENTACIJA

Za modeliranje puzanja u programskom paketu ABAQUS, može se primijeniti eksponencijalni zakon puzanja, no za složenije zakone puzanja, kao što je to slučaj u ovom radu, koji u sebi spreže akumuliranje oštećenja i viskoplastičnu deformaciju, navedeni program zahtijeva primjenu korisničke rutine. Za to stoji na raspolaganju korisnička rutina CREEP, koja omogućava relativno jednostavno implementiranje konstitutivnog modela za analizu puzanja. No, kako je u ovom radu potrebno modelirati složeni proces cikličkog opterećivanja s naknadnim rasterećivanjem u radu je korištena kompleksnija korisnička rutina UMAT. Primjena rutine UMAT podrazumijeva programiranje dodatnog koda u kojem se definira algoritam za integriranje materijalnog modela na razini točke integracije, što je u radu provedeno pisanjem koda u programskom jeziku FORTRAN.



Slika 65. Algoritam za integriranje nelinearnog konstitutivnog modela za jedan vremenski korak [106]

Na slici 65 prikazan je algoritam za integriranje proizvoljnog nelinearnog konstitutivnog modela za jedan vremenski korak, koji je originalno prikazan u [106].

Za numeričku formulaciju konstitutivnog modela, prikazane vremenski ovisne jednačbe potrebno je zapisati u inkrementalnom obliku. Transformacija konstitutivnih jednačbi provedena je korištenjem slijedećeg integracijskog operatora [107]:

$$f_{t_n+\Delta t} = f_{t_n} + \Delta f, \quad (76)$$

gdje je f neka funkcija, f_{t_n} je njezina vrijednost na početku inkrementa, Δf je promjena funkcije unutar inkrementa i Δt je vremenski inkrement.

U tekstu koji slijedi najprije će se dati prikaz jednodimenzijske formulacije numeričkog algoritma, a nakon toga proširenje na trodimenzijsku formulaciju.

7.1. Jednodimenzijska formulacija

Za poznate vrijednosti unutarnjih varijabli stanja s kraja prethodnog vremenskog koraka t potrebno je odrediti njihove vrijednosti u novom trenutku $t + \Delta t$. Obnovljene vrijednosti varijabli stanja $\sigma(t_n + \Delta t)$ i $\varepsilon(t_n + \Delta t)$ na kraju vremenskog koraka $(t_n + \Delta t)$ određuju se za dani prirast deformacije $\Delta \varepsilon(t_n)$ u trenutku t_n . Za to je potrebno prethodno izvedene konstitutivne jednačbe primjenom metode konačnih razlika zapisati u slijedećem inkrementalnom obliku:

- za slučaj viskoelastičnosti ($\sigma < \sigma_{th}^{VP}$):

$$\text{iz (65): } \varepsilon_c = (\varepsilon_{VE})_c = \left[J_0 + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \right] \cdot (\sigma + \Delta \sigma) - \Delta \varepsilon, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (77)$$

$$\text{iz (66): } \varepsilon_r = (\varepsilon_{VE})_r = J_1 \left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma \right] \cdot (\sigma + \Delta \sigma) - \Delta \varepsilon, \quad \text{za } t > t_0, \quad (78)$$

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i viskoplastičnosti ($\sigma_{th}^{VP} < \sigma < \sigma_{th}^D$):

$$\begin{aligned} \text{iz (67): } \varepsilon_c = (\varepsilon_{VE})_c + (\varepsilon_{VP})_c = & \left[J_0 + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \right] \cdot (\sigma + \Delta \sigma) + \\ & + A \cdot \left(\sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta \sigma \right)^{m \cdot n} \cdot (t + \Delta t)^n - \Delta \varepsilon, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (79) \end{aligned}$$

$$\text{iz (68): } \varepsilon_r = (\varepsilon_{VE})_r + (\varepsilon_{VP})_r = J_1 \left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma \right] \cdot (\sigma + \Delta \sigma) +$$

$$+A \cdot \langle \sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta\sigma \rangle^{m \cdot n} \cdot t_0^n - \Delta\varepsilon, \quad \text{za } t > t_0, \quad (80)$$

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja ($\sigma > \sigma_{th}^D$):

$$\begin{aligned} \text{iz (69): } \varepsilon_c &= (\varepsilon_{VE}^D)_c + (\varepsilon_{VP})_c = \\ &= \left[1 + a(\sigma + \Delta\sigma)^b \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot \left\{ J_0 \cdot \left[1 - (r+1) \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right]^{\frac{1}{r+1}} \right. \\ &\quad \left. + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \cdot \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] \right\} + A \cdot \langle \sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t^n - \Delta\varepsilon, \\ &\quad \text{za } 0 < t < t_0, \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \text{iz (70): } \varepsilon_r &= (\varepsilon_{VE}^D)_r + (\varepsilon_{VP})_r = \\ &= \left[1 + a(\sigma + \Delta\sigma)^b \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot J_1 \left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma \right] \cdot \\ &\quad \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] + A \cdot \langle \sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^{VP} \rangle^{m \cdot n} \cdot t_0^n - \Delta\varepsilon, \\ &\quad \text{za } t > t_0. \end{aligned} \quad (82)$$

Ovdje je potrebno napomenuti da u prethodnim izrazima t_0 označava vrijeme kod kojeg u procesu puzanja dolazi do rasterećenje materijala.

Za izračunavanje prirasta naprezanja $\Delta\sigma$ za slučaj viskoelastičnog ponašanja materijala kad su naprezanja manja od graničnih vrijednosti kod kojih dolazi do akumuliranja viskoplastičnih deformacija i oštećenja, jednadžbe (77) i (78) mogu se zapisati na sljedeći način:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{M(t)} \cdot \Delta\varepsilon + \frac{1}{M(t)} \cdot \varepsilon - \sigma, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (83)$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{N(t)} \cdot \Delta\varepsilon + \frac{1}{N(t)} \cdot \varepsilon - \sigma, \quad \text{za } t > t_0, \quad (84)$$

gdje su:

$$M(t) = J_0 + J_1 (t + \Delta t)^\gamma, \quad (85)$$

$$N(t) = J_1 \left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma \right]. \quad (86)$$

Ubrzanje konvergencije globalnog inkrementalnog postupka za slučaj viskoelastičnog ponašanja materijala ostvareno je primjenom konzistentnog operatora tj. Jacobijeve matrice koja je izvedena u obliku:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{1}{M(t)}, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (87)$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{1}{N(t)}, \quad \text{za } t > t_0. \quad (88)$$

U slučaju kada se uz viskoelastičnost javlja efekt viskoplastičnosti, a kasnije i oštećenja tada više nije tako jednostavno iz jednadžbi (79), (80), (81) i (82) izraziti prirast naprezanja $\Delta \sigma$. Tada se za izračunavanje prirasta naprezanja iz ovih nelinearnih jednadžbi primjenjuje Newton-Raphsonov iterativni postupak izražen jednadžbom

$$\Delta \sigma^{(i+1)} = \Delta \sigma^{(i)} - \frac{F_{t_n + \Delta t}^{(i)}}{\left(\frac{dF_{t_n + \Delta t}}{d\Delta \sigma} \right)^{(i)}}, \quad (89)$$

gdje i označava iteracijski korak, a $F_{t_n + \Delta t}^{(i)}$ je funkcija koja mora zadovoljiti uvjet $F_{t_n + \Delta t}^{(i)} = 0$. Ta funkcija ima sljedeće oblike:

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i viskoplastičnosti ($\sigma_{th}^{VP} < \sigma < \sigma_{th}^D$):

$$F_{t_n + \Delta t} = M(t) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) + K(t, \sigma) - \Delta \varepsilon - \varepsilon, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (90)$$

$$F_{t_n + \Delta t} = N(t) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) + L(\sigma) - \Delta \varepsilon - \varepsilon, \quad \text{za } t > t_0, \quad (91)$$

gdje su $M(t)$ i $N(t)$ dani jednadžbama (85) i (86), a ostale varijable imaju oblik:

$$K(t, \sigma) = A \cdot (\sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta \sigma)^{m \cdot n} \cdot (t + \Delta t)^n, \quad (92)$$

$$L(\sigma) = A \cdot (\sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta \sigma)^{m \cdot n} \cdot (t_0)^n, \quad (93)$$

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja ($\sigma > \sigma_{th}^D$):

$$F_{t_n+\Delta t} = \left[1 + a(\sigma + \Delta\sigma)^b \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot \left\{ J_0 \cdot \left[1 - (r+1) \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right]^{-\frac{1}{r+1}} \right. \\ \left. + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \cdot \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] \right\} + K(t, \sigma) - \Delta\varepsilon - \varepsilon, \\ \text{za } 0 < t < t_0, \quad (94)$$

$$F_{t_n+\Delta t} = \left[1 + a(\sigma + \Delta\sigma)^b \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot N(t) \cdot \\ \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] + L(\sigma) - \Delta\varepsilon - \varepsilon, \quad \text{za } t > t_0. \quad (95)$$

Derivaciju funkcije F u izrazu (89) lako je odrediti parcijalnim deriviranjem izraza (90), (91), (94) i (95) po prirastu naprezanja.

Nadalje, za ubrzavanje globalnog inkrementalnog postupka potrebno je izvesti izraz za tangentni operator. U fazi kad se materijal ponaša samo linearno viskoelastično izrazi za konzistentni operator dani su jednadžbama (87) i (88). U fazi nelinearnog ponašanja potrebno je parcijalno derivirati izraze (79), (80), (81) i (82) po $\Delta\varepsilon$, pa se na taj način dobiva izraz za $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon$:

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i viskoplastičnosti ($\sigma_{th}^{VP} < \sigma < \sigma_{th}^D$):

$$\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon} = \frac{1}{M(t) + K_{,\Delta\sigma}(t, \sigma)}, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (96)$$

$$\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon} = \frac{1}{N(t) + L_{,\Delta\sigma}(t_0, \sigma)}, \quad \text{za } t > t_0, \quad (97)$$

gdje su $M(t)$ i $N(t)$ dani u jednadžbama (85) i (86), a ostale varijable su:

$$K_{,\Delta\sigma}(t, \sigma) = A \cdot m \cdot n \cdot (\sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta\sigma)^{(m \cdot n - 1)} \cdot (t + \Delta t)^n, \quad (98)$$

$$L_{,\Delta\sigma}(t_0, \sigma) = A \cdot m \cdot n \cdot (\sigma - \sigma_{th}^{VP} + \Delta\sigma)^{(m \cdot n - 1)} \cdot (t_0)^n. \quad (99)$$

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja ($\sigma > \sigma_{th}^D$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = & \left\{ \left[\left(ab(\sigma + \Delta \sigma)^{b-1} \right) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) + \left(1 + a(\sigma + \Delta \sigma)^b \right) \right] \cdot \right. \\
& \left. \left\{ J_0 \cdot \left[1 - (r+1) \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right]^{-\frac{1}{r+1}} \right. \right. \\
& \left. \left. + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \cdot \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] \right\} + \right. \\
& \left. \left[\left(1 + a(\sigma + \Delta \sigma)^b \right) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) \right] \cdot \frac{r}{C} \cdot \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^{r-1} (t + \Delta t) \right. \\
& \cdot \left. \left\{ J_0 \cdot \left[1 - (r+1) \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right]^{\left(\frac{1}{r+1} - 1 \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \cdot \frac{1}{1+\gamma} \right\} + K_{,\Delta \sigma}(t, \sigma) \right\}^{-1}, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = & \left\{ \left[\left(ab(\sigma + \Delta \sigma)^{b-1} \right) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) + \left(1 + a(\sigma + \Delta \sigma)^b \right) \right] \cdot \right. \\
& N(t) \cdot \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \cdot \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^r (t + \Delta t) \right] + \\
& \left[\left(1 + a(\sigma + \Delta \sigma)^b \right) \cdot (\sigma + \Delta \sigma) \right] \cdot N(t) \cdot \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{r}{C} \cdot \\
& \left. \left(\frac{\sigma + \Delta \sigma - \sigma_{th}^D}{C} \right)^{r-1} (t + \Delta t) + L_{,\Delta \sigma}(t, \sigma) \right\}^{-1}, \quad \text{za } t > t_0. \quad (101)
\end{aligned}$$

Za tako određeni prirast naprezanja $\Delta \sigma$ i konzistentni operator $\partial \Delta \sigma / \partial \Delta \varepsilon$, određuju se vrijednosti naprezanja i unutarnjih varijabli na kraju vremenskog intervala. Izvedeni algoritam implementiran je na razini materijalne točke u dostupne konačne elemente u programskom paketu ABAQUS/Standard [69] koristeći korisničku rutinu UMAT.

U poglavlju 6.3 opisano je da je zbog nedostatnih eksperimentalnih podataka iz literature za ljudsko kortikalno koštano tkivo, konstitutivni model koji spreže viskoelastičnost i oštećenje modificiran u odnosu na model za analizu kompozitnog materijala i goveđeg koštanog tkiva. Na taj način je funkcija oštećenja linearnog karaktera, što se može vidjeti sa slike 61. To je razlog što su sada određene inkrementalne jednadžbe drugačije, no izvode se po analogiji s prethodno pokazanim u ovom odjeljku.

Konstitutivne jednačbe prikazane na slici 64 i dane jednačbama (73), (74) i (75) za tri različita načina ponašanja materijala potrebno je zapisati u inkrementalnom obliku pomoću jednačbe (76). Takav inkrementalan zapis za slučaj viskoelastičnosti prikazan je jednačbom (77) za puzanje i jednačbom (78) za rasterećenje. Za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i viskoplastičnosti u procesu puzanja inkrementalni zapis dan je jednačbom (79), a za rasterećenje jednačbom (80). Inkrementalan zapis za slučaj viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja se razlikuje i ima oblik:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c = (\varepsilon_{VE}^D)_c + (\varepsilon_{VP})_c = & \left[1 + k_d (\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot \left[J_0 + J_1 (t + \Delta t)^\gamma \right] \\ & + A \cdot \left\langle \sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^{VP} \right\rangle^{m-n} \cdot t^n - \Delta\varepsilon, \\ & \text{za } 0 < t < t_0, \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = (\varepsilon_{VE}^D)_r + (\varepsilon_{VP})_r = & \left[1 + k_d (\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot J_1 \left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma \right] \\ & + A \cdot \left\langle \sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^{VP} \right\rangle^{m-n} \cdot t_0^n - \Delta\varepsilon, \\ & \text{za } t > t_0. \end{aligned} \quad (103)$$

Newton-Rapsonov iterativni postupak prikazan jednačbom (89) primjenjuje se za izračunavanje ove nelinearne jednačbe. Funkcija koja zadovoljava uvjet da je jednaka 0 u ovom slučaju može se zapisati u obliku

$$F_{t_n+\Delta t} = \left[1 + k_d (\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot M(t) + K(t, \sigma) - \Delta\varepsilon - \varepsilon, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (104)$$

$$F_{t_n+\Delta t} = \left[1 + k_d (\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot N(t) + L(\sigma) - \Delta\varepsilon - \varepsilon, \quad \text{za } t > t_0. \quad (105)$$

Kako bi se ubrzala konvergencija iterativnog postupka potrebno je odrediti konzistentni operator koji u ovom slučaju ima oblik

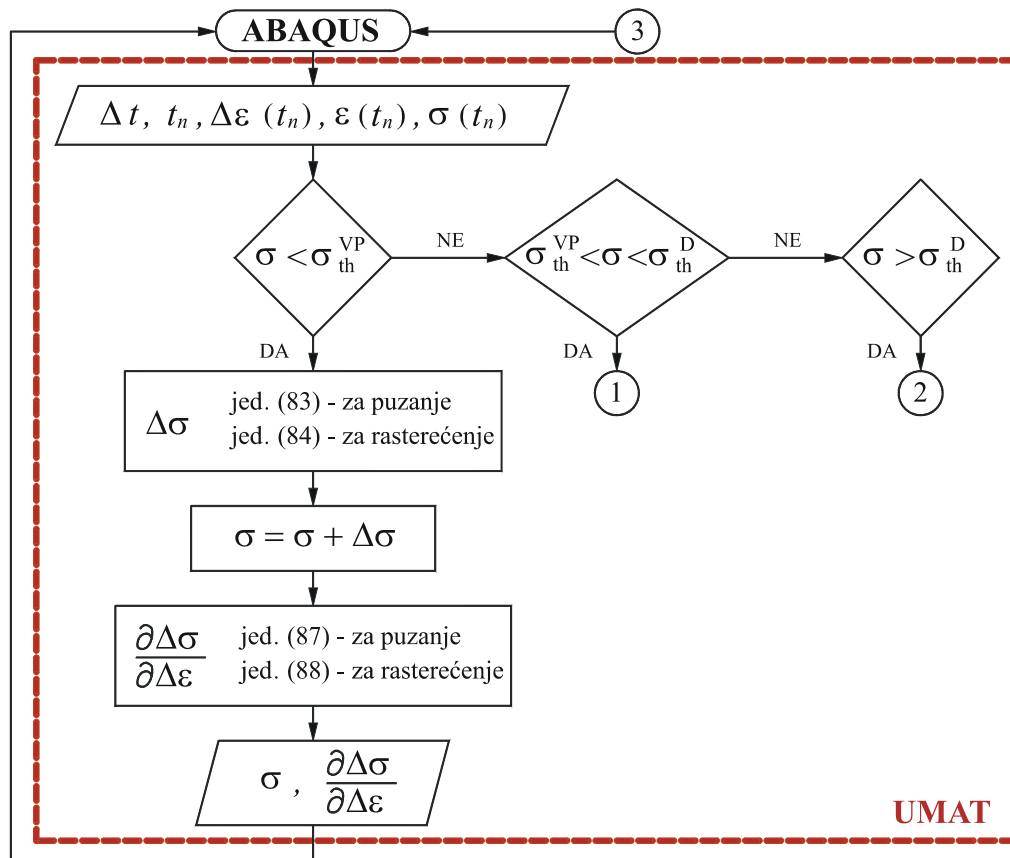
$$\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} = \left\{ \left[1 + k_d (2\sigma + 2\Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot M(t) + K_{,\Delta\sigma}(t, \sigma) \right\}^{-1}, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (106)$$

$$\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} = \left\{ \left[1 + k_d (2\sigma + 2\Delta\sigma - \sigma_{th}^D) \right] \cdot (\sigma + \Delta\sigma) \cdot N(t) + L_{,\Delta\sigma}(t, \sigma) \right\}^{-1}, \quad \text{za } t > t_0. \quad (107)$$

Za provjeru točnosti izvedenog algoritma provedena je simulacija puzanja s naknadnim rasterećenjem primjenom jednog jednodimenzijskog konačnog elementa T2D2 iz programskog paketa Abaqus (slika 69). Ovdje je prvo dodijeljeno vlačno opterećenje za koje je pripadna deformacija u trenutku $t = 0$ dobivena iz elastične analize (STEP 1). Nakon toga,

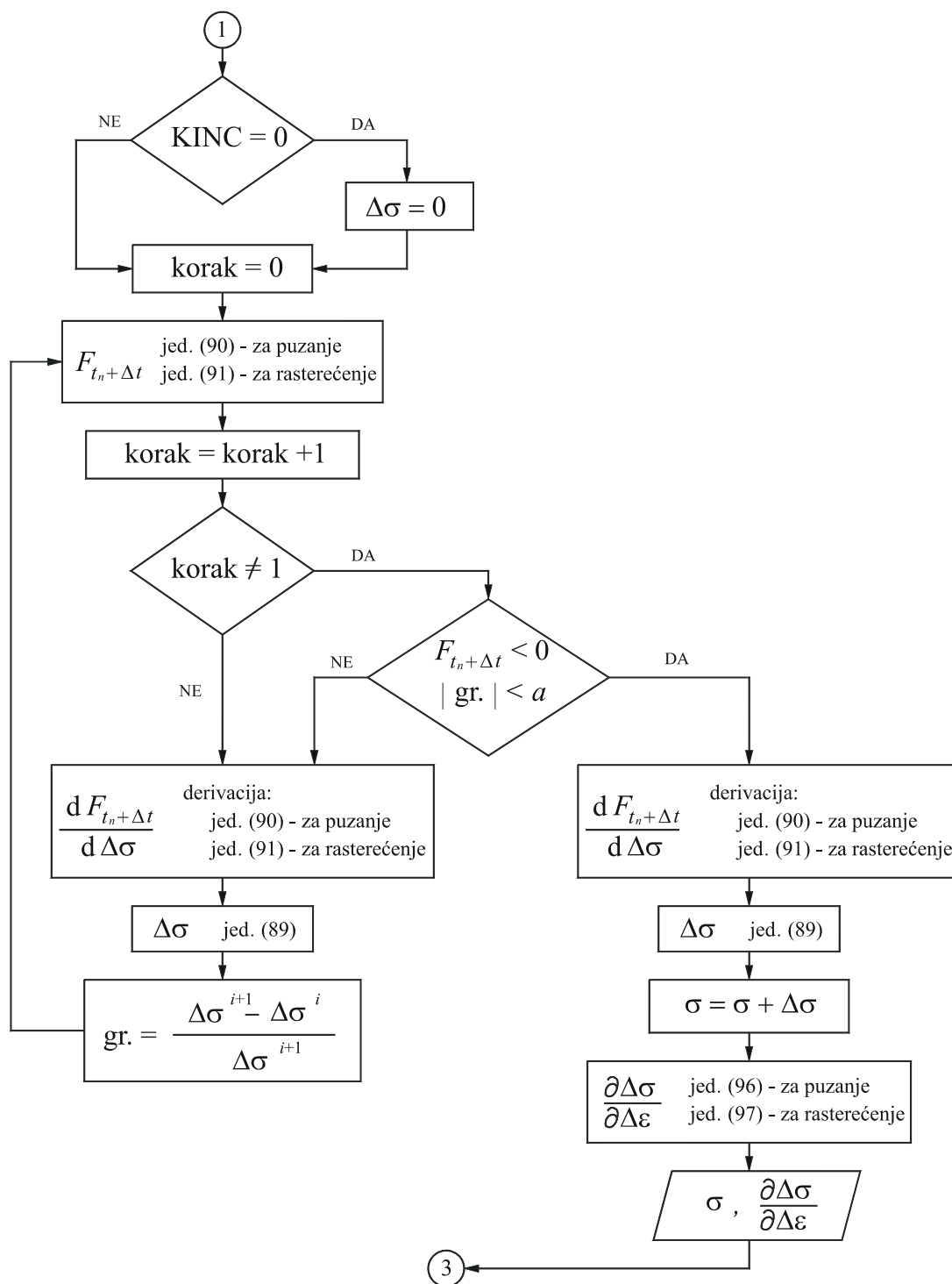
opterećenje je držano konstantnim (STEP 2) te je uslijedila vremenski ovisna analiza puzanja. U trenutku $t_0 = 60$ s modelirano je elastično rasterećenje (STEP 3) nakon kojeg je analizirana relaksacija od puzanja (STEP 4). Korak (STEP) definira se u programskom paketu ABAQUS te služi za kontroliranje opterećenja.

Algoritam za integriranje konstitutivnog modela s pripadnom implementacijom u korisničku rutinu UMAT za slučaj kada naprezanje ne prelazi granicu kod koje dolazi do akumuliranja viskoplastične deformacije tj. kada je ponašanje materijala samo linearno viskoelastično, prikazan je dijagramom toka na slici 66.

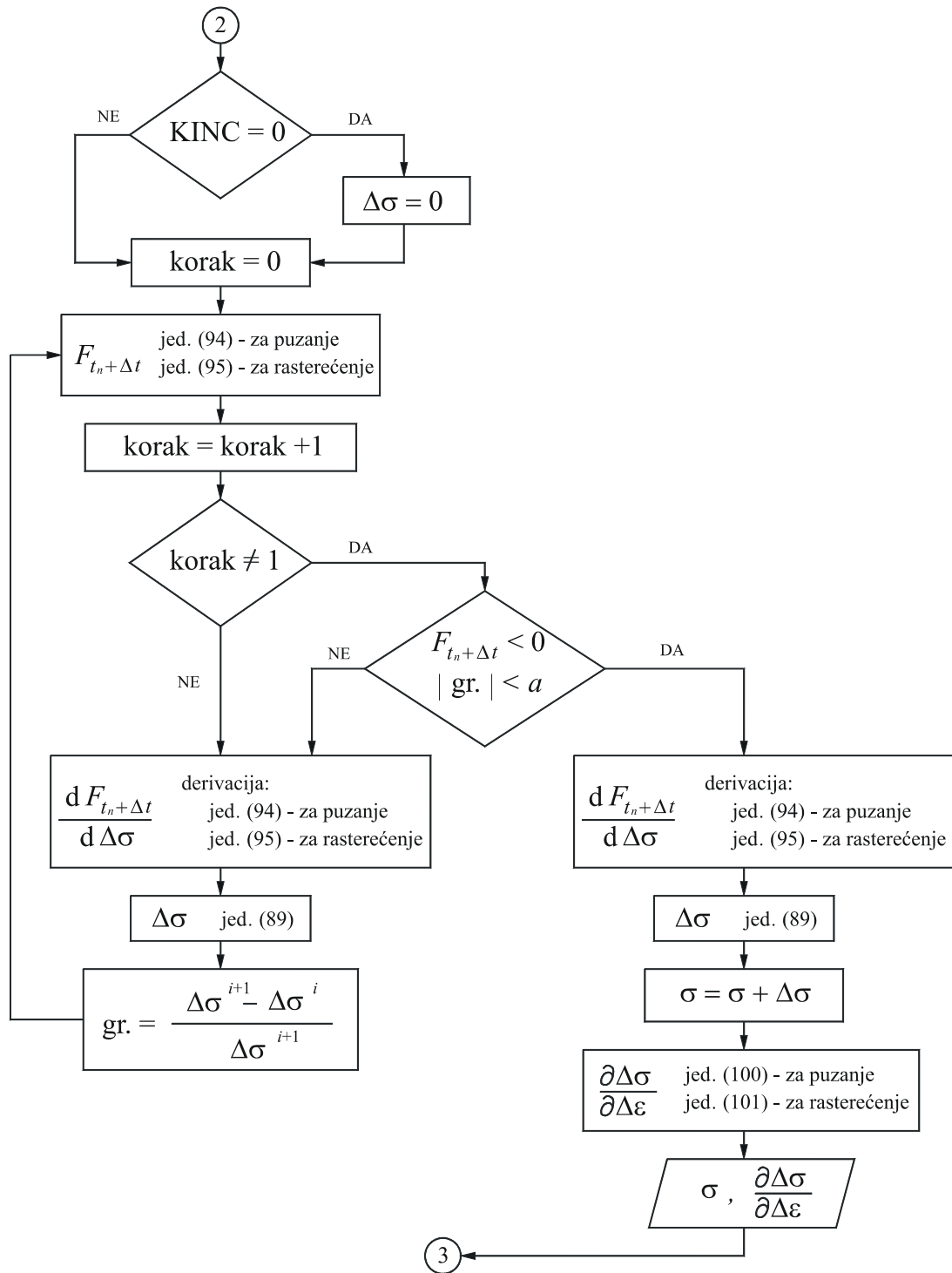


Slika 66. Dijagram toka za viskoelastično ponašanje materijala

Na slici 67 prikazan je dijagram toka algoritma za integriranje konstitutivnog modela viskoelastičnosti i viskoplastičnosti, dok je na slici 68 dan dijagram za viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala spregnuto s oštećenjem. Ovi dijagrami toka na slici 66, 67 i 68 korišteni su u STEP-u 2 za puzanje i u STEP-u 4 za rasterećenje.



Slika 67. Dijagram toka za viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala



Slika 68. Dijagram toka za viskoelastično i viskoplastično ponašanje materijala spregnuto s oštećenjem

7.2. Trodimenzijska formulacija

U odjeljku 6.1., na temelju eksperimentalnih rezultata određeni su parametri materijala za analizirani kompozitni materijal. Pritom je za graničnu vrijednost kod koje dolazi do akumuliranja oštećenja dobivena vrijednost u iznosu od 32,1 MPa, odnosno približno 30 % od vlačne čvrstoće materijala. Taj iznos je u skladu s rezultatom koji je dobiven u literaturi [45, 46, 99] za kompozit čija je uretanska matrica također ojačana staklenim vlaknima. Osim toga, potrebno je za naglasiti da ova dva kompozita pokazuju slično mehaničko ponašanje. Sa slika 23 i 45 je vidljivo da za kompozitni materijal analiziran u ovom radu viskoplastična deformacija tijekom eksperimenta puzanja iznosi približno 10 % od ukupne deformacije puzanja. Slično vrijedi i za goveđe kortikalno koštano tkivo za koje su rezultati dani u odjeljcima 5.2. i 6.2. Za razliku od toga, kod kompozitnog materijala analiziranog u literaturi [45, 46, 99] taj odnos je otprilike 5 % te je u navedenom radu utjecaj viskoplastične deformacije zanemaren u formulaciji jednodimenzijskog konstitutivnog modela. Za slučaj u ovom radu analiziranog goveđeg koštanog tkiva i kompozitnog materijala, dobivena viskoplastična deformacija u iznosu od 10 % od ukupne deformacije nije u toj mjeri zanemariva. No, u cilju pojednostavljenja trodimenzijske (3D) formulacije konstitutivnog modela, kao i numeričkog modela, utjecaj viskoplastične deformacije na proces deformiranja analiziranog kompozitnog materijala je zanemaren. Razlog tome je i činjenica što je za formuliranje trodimenzijskog viskoplastičnog konstitutivnog modela potrebno dosta više eksperimentalnih rezultata iz kojih bi slijedili i pripadni parametri materijala, što izlazi iz okvira ovog rada.

Numerička formulacija jednodimenzijskog (1D) viskoelastičnog modela spregnutog s oštećenjem prikazanom u radu, ovdje će se proširiti na trodimenzijsku formulaciju.

Abdel-Tawab i Weitsman u svojoj publikaciji [99] su na primjeru prethodno spomenutog kompozitnog materijala pokazali da se jednodimenzijski model viskoelastičnosti za slučaj kratkotrajnog puzanja kada je naprezanje manje od granične vrijednosti pri kojoj dolazi do akumuliranja oštećenja ($\sigma < \sigma_{th}^D$) može dobro aproksimirati izrazom

$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{VE})_c = [J_0 + J_1 t^\gamma] \cdot \sigma, \quad (0 < t < t_0), \quad (108)$$

odnosno za slučaj rasterećenja izraz poprima oblik

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_{VE})_r = J_1 [t^\gamma - (t - t_0)^\gamma] \cdot \sigma, \quad (t > t_0). \quad (109)$$

Prethodna dva izraza dobivena su na način da je u izrazu (62) uzet samo prvi član hipergeometrijske funkcije ${}_2F_1$. Pritom je u skladu s [108] vremenski ovisna podatljivost dana jednadžbom (15) i (16) (Kelvinov model) zapisana u obliku

$$\Delta J_{1111}(t) = \sum_n \Delta J_{1111}^n (1 - e^{-t/\tau_n}) = J_1 t^\gamma. \quad (110)$$

Prednost ovakve funkcije za vremenski ovisnu podatljivost je što je matematički jednostavna, a osim toga pokazala se dosta točna za modeliranje procesa kratkotrajnog puzanja. Uspješno se primjenjuje za različite vrste materijala, a posebno polimera i kompozita. Na taj način viskoelastična podatljivost definirana jednadžbom (56) poprima slijedeći oblik

$$J = J_0 + J_1 t^\gamma. \quad (111)$$

Ranije je pokazano da se jednodimenzijski model viskoelastičnosti spregnut s oštećenjem (kada je $\sigma > \sigma_{th}^D$) za proces kratkotrajnog puzanja može prikazati izrazom

$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{VE}^D)_c \approx \frac{1}{1-w_0} [J_0 + J_1 t^\gamma] \cdot \sigma, \quad (0 < t < t_0), \quad (112)$$

odnosno za slučaj rasterećenja izraz poprima oblik

$$\varepsilon_r = (\varepsilon_{VE}^D)_r \approx \frac{1}{1-w_0} J_1 [t^\gamma - (t-t_0)^\gamma] \cdot \sigma, \quad (t > t_0). \quad (113)$$

Iz dijagrama ovisnosti analize omjera podatljivosti pri rasterećenju i početne podatljivosti o naprezanju za kompozitni materijal (slika 22) i goveđe kortikalno koštano tkivo (slika 35) vidljivo je da su obje funkcije istog oblika

$$\frac{1}{1-w_0} = \frac{J_d}{J_0} = 1 + a \cdot \sigma^b, \quad (114)$$

gdje su a i b parametri koji su određivani metodom najmanjih kvadrata odstupanja i njihova vrijednost prikazana je na slikama 41 i 51, te u tablicama 4 i 5. Ovaj omjer podatljivosti dan izrazom (114) je inverzna vrijednost omjera krutosti tj. omjera početnog i trenutnog modula elastičnosti E_0/E .

U ovom radu će se trodimenzijska formulacija izvesti uz pretpostavku ortotropnog oštećenja pretpostavljajući da su funkcije promjene oštećenja s naprezanjem istog oblika kao aproksimirana vrijednost prikazana jednadžbom (114). Na taj način, ovdje prikazana 3D formulacija spreže ortotropno viskoelastično ponašanje materijala s ortotropnom raspodjelom

oštećenja. Kao što je navedeno u poglavlju 3.1, tenzor oštećenja za slučaj ortotropne raspodjele oštećenja temelji se na principu glavnih komponenti oštećenja pokazanih jednačbom (6) što će se primijeniti i u ovom radu. Pritom tenzor oštećenja \mathbf{M} ima oblik:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & M_{44} & 0 & 0 \\ S & I & M & & M_{55} & 0 \\ & & & & & M_{66} \end{bmatrix}, \quad (115)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} M_{11} &= 1 + a_1 \sigma_{11}^{b_1}, \\ M_{22} &= 1 + a_2 \sigma_{22}^{b_2}, \\ M_{33} &= 1 + a_3 \sigma_{33}^{b_3}, \\ M_{44} &= \sqrt{(1 + a_1 \sigma_{12}^{b_1})(1 + a_2 \sigma_{21}^{b_2})}, \\ M_{55} &= \sqrt{(1 + a_2 \sigma_{23}^{b_2})(1 + a_3 \sigma_{32}^{b_3})}, \\ M_{66} &= \sqrt{(1 + a_3 \sigma_{31}^{b_3})(1 + a_1 \sigma_{13}^{b_1})}. \end{aligned} \quad (116)$$

Prethodni izrazi od (108) do (115) poslužit će za proširenje jednodimenzijske na trodimenzijsku formulaciju.

U skladu s izrazom (108) ukupna deformacija može se zapisati kao zbroj elastične $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ i viskoelastične deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}^{VE}$ na način da je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^E + \boldsymbol{\varepsilon}^{VE}. \quad (117)$$

Deriviranjem Helholtzove slobodne energije po deformaciji (37) dobiva se Hookeov zakon koji ima oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^E, \quad (118)$$

gdje je \mathbf{C} matrica elastičnosti za ortotropan materijal prikazana izrazom

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_3E_1\Delta} & \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_3E_1\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12}}{E_3E_1\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} & \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix}, \quad (119)$$

te je

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_2E_3}. \quad (120)$$

Komponente tenzora naprezanja i deformacija iz jednadžbe (118) koriste se u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} = \sigma_x, & \sigma_2 &= \sigma_{22} = \sigma_y, & \sigma_3 &= \sigma_{33} = \sigma_z, \\ \sigma_4 &= \sigma_{12} = \tau_{xy}, & \sigma_5 &= \sigma_{23} = \tau_{yz}, & \sigma_6 &= \sigma_{31} = \tau_{zx}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} = \varepsilon_x, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_y, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} = \varepsilon_z, \\ \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}, & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{23} = \gamma_{yz}, & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{31} = \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (121)$$

pri čemu je smjer 1 longitudinalni, smjer 2 transverzni, a smjer 3 radijalni. Elastične konstante materijala izražene su u poznatom obliku, kao što su prezentirani u [109] i [3]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, & C_{22} &= \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_3E_1\Delta}, & C_{33} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta}, & C_{21} &= \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_3E_1\Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, & C_{31} &= \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta}, \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12}}{E_3E_1\Delta}, & C_{32} &= \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, \\ C_{44} &= G_{12}, & C_{55} &= G_{23}, & C_{66} &= G_{31}, \end{aligned} \quad (122)$$

dok je \mathbf{S}^E simetrična matrica podatljivosti, koja je inverzna matrici elastičnosti \mathbf{C} , dana u obliku

$$\mathbf{S}^E = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}, \quad (123)$$

Kao što je već rečeno, za ortotropan materijal konstitutivne relacije za elastično ponašanje materijala mogu se zapisati s 9 nezavisnih parametara. Isti broj parametara je potreban za opisivanje viskoznog ponašanja ortotropnog materijala. Kao što je vidljivo iz jednadžbe (108), primjenimo li konstantno naprezanje u trenutku t' , deformacija puzanja je proporcionalna s naprežanjem. Za definiranje vremenski ovisne matrice podatljivosti uvodi se relativna funkcija puzanja na način da je $\phi = \varepsilon^{\text{VE}} / \varepsilon^E$, kvocijent viskoelastične i elastične deformacije. Pritom odskočna funkcija $\phi(t - t')$ ima vrijednost 1 kada je $(t - t') > 0$, a 0 kada je $(t - t') < 0$. Na taj način vremenski ovisna matrica podatljivosti za slučaj puzanja ortotropnog materijala $S_{ij,c}^{\text{VE}}(t)$ prema [110] ima oblik

$$\mathbf{S}_c^{\text{VE}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} \phi_{\sigma 1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} \phi_{\nu 21} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \phi_{\nu 31} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} \phi_{\nu 12} & \frac{1}{E_2} \phi_{\sigma 2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \phi_{\nu 32} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} \phi_{\nu 13} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \phi_{\nu 23} & \frac{1}{E_3} \phi_{\sigma 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \phi_{\tau 12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \phi_{\tau 23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \phi_{\tau 31} \end{bmatrix}, \quad (124)$$

gdje relativne funkcije puzanja $\phi_{\sigma 1}$, $\phi_{\sigma 2}$ i $\phi_{\sigma 3}$ ovise o konstantnom jednoosnom vlačnom naprezanju u pripadnoj osi ortotropije. Nadalje, $\phi_{\tau 12}$, $\phi_{\tau 23}$ i $\phi_{\tau 31}$ odgovaraju relativnim funkcijama uslijed konstantnog naprezanja smicanja u pripadnoj ravni ortotropije. Osim toga, $\phi_{\nu 21}$, $\phi_{\nu 31}$, $\phi_{\nu 12}$, $\phi_{\nu 32}$, $\phi_{\nu 13}$ i $\phi_{\nu 23}$ označavaju relativnu funkciju puzanja uslijed jednoosnog vlačnog naprezanja u pripadnom ortogonalnom smjeru. Na taj je način, za viskoelastično ponašanje ortotropnog materijala potrebno 18 parametara. U prikazanoj formulaciji pokazuje se da je za definiranje vremenski ovisnog tenzora podatljivosti potrebno ipak 18 parametara, a ne 9, na način da je

$$\begin{aligned}\phi_{\sigma 1} &= \frac{J_{1,\sigma 1} \cdot t^{\gamma_{\sigma 1}}}{J_{0,\sigma 1}}, \quad \phi_{\sigma 2} = \frac{J_{1,\sigma 2} \cdot t^{\gamma_{\sigma 2}}}{J_{0,\sigma 2}}, \quad \phi_{\sigma 3} = \frac{J_{1,\sigma 3} \cdot t^{\gamma_{\sigma 3}}}{J_{0,\sigma 3}}, \\ \phi_{\nu 21} &= \frac{J_{1,\nu 21} \cdot t^{\gamma_{\nu 21}}}{J_{0,\nu 21}}, \quad \phi_{\nu 31} = \frac{J_{1,\nu 31} \cdot t^{\gamma_{\nu 31}}}{J_{0,\nu 31}}, \quad \phi_{\nu 32} = \frac{J_{1,\nu 32} \cdot t^{\gamma_{\nu 32}}}{J_{0,\nu 32}}, \\ \phi_{\tau 12} &= \frac{J_{1,\tau 12} \cdot t^{\gamma_{\tau 12}}}{J_{0,\tau 12}}, \quad \phi_{\tau 23} = \frac{J_{1,\tau 23} \cdot t^{\gamma_{\tau 23}}}{J_{0,\tau 23}}, \quad \phi_{\tau 31} = \frac{J_{1,\tau 31} \cdot t^{\gamma_{\tau 31}}}{J_{0,\tau 31}}.\end{aligned}\tag{125}$$

Kombiniranjem izraza (117) i (118) tenzor naprezanja poprima oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{VE}}(t)).\tag{126}$$

Nadalje se tenzor ukupne deformacije za slučaj puzanja kada je $\sigma < \sigma_{\text{th}}^{\text{D}}$ može zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{c}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{E}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{c}}^{\text{VE}}(t),\tag{127}$$

odnosno primjenom izraza (126) i izraza za matricu podatljivosti dobiva se

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{c}}(t) = [\mathbf{S}^{\text{E}} + \mathbf{S}_{\text{c}}^{\text{VE}}(t)] : \boldsymbol{\sigma}.\tag{128}$$

Za slučaj rasterećenja ($t < t_0$) kada je $\sigma < \sigma_{\text{th}}^{\text{D}}$ tenzor ukupne deformacije može se zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}^{\text{VE}}(t) = \mathbf{S}_{\text{r}}^{\text{VE}} : \boldsymbol{\sigma},\tag{129}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
 S_{11,r}^{\text{VE}} &= J_{1,\sigma 1} \cdot \left[t^{\gamma_{\sigma 1}} - (t-t_0)^{\gamma_{\sigma 1}} \right], \quad S_{22,r}^{\text{VE}} = J_{1,\sigma 2} \cdot \left[t^{\gamma_{\sigma 2}} - (t-t_0)^{\gamma_{\sigma 2}} \right], \\
 S_{33,r}^{\text{VE}} &= J_{1,\sigma 3} \cdot \left[t^{\gamma_{\sigma 3}} - (t-t_0)^{\gamma_{\sigma 3}} \right], \quad S_{21,r}^{\text{VE}} = J_{1,\nu 21} \cdot \left[t^{\gamma_{\nu 21}} - (t-t_0)^{\gamma_{\nu 21}} \right], \\
 S_{31,r}^{\text{VE}} &= J_{1,\nu 31} \cdot \left[t^{\gamma_{\nu 31}} - (t-t_0)^{\gamma_{\nu 31}} \right], \quad S_{32,r}^{\text{VE}} = J_{1,\nu 32} \cdot \left[t^{\gamma_{\nu 32}} - (t-t_0)^{\gamma_{\nu 32}} \right], \\
 S_{44,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{12}} \left[\frac{J_{1,\tau 12} \cdot \left[t^{\gamma_{\tau 12}} - (t-t_0)^{\gamma_{\tau 12}} \right]}{J_{0,\tau 12}} \right], \\
 S_{55,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{23}} \left[\frac{J_{1,\tau 23} \cdot \left[t^{\gamma_{\tau 23}} - (t-t_0)^{\gamma_{\tau 23}} \right]}{J_{0,\tau 23}} \right], \\
 S_{66,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{31}} \left[\frac{J_{1,\tau 31} \cdot \left[t^{\gamma_{\tau 31}} - (t-t_0)^{\gamma_{\tau 31}} \right]}{J_{0,\tau 31}} \right].
 \end{aligned} \tag{130}$$

Za slučaj kada je $\sigma > \sigma_{\text{th}}^{\text{D}}$ vrijedi da je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{S}} : \boldsymbol{\sigma}, \tag{131}$$

gdje je efektivna matrica podatljivosti prema [93, 94] definirana kao

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{M} : \mathbf{S}. \tag{132}$$

U prethodnom izrazu \mathbf{M} je tenzor oštećenja predstavljen izrazom (60) i (115).

Prikazane konstitutivne jednadžbe transformirane su u inkrementalan oblik korištenjem integracijskog operatora danog u (76) te imaju oblik:

- za slučaj viskoelastičnosti ($\sigma < \sigma_{\text{th}}^{\text{D}}$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}(t_n + \Delta t) : (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}), \tag{133}$$

gdje u matrici podatljivosti $\mathbf{S}(t_n + \Delta t)$ pojedini članovi za slučaj puzanja ($0 < t < t_0$) imaju oblik:

$$\begin{aligned}
 S_{11,t_n+\Delta t} &= J_{0,\sigma 1} + J_{1,\sigma 1} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 1}}, \quad S_{22,t_n+\Delta t} = J_{0,\sigma 2} + J_{1,\sigma 2} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 2}}, \\
 S_{33,t_n+\Delta t} &= J_{0,\sigma 3} + J_{1,\sigma 3} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 3}}, \quad S_{21,t_n+\Delta t} = J_{0,\nu 21} + J_{1,\nu 21} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 21}}, \\
 S_{31,t_n+\Delta t} &= J_{0,\nu 31} + J_{1,\nu 31} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 31}}, \quad S_{32,t_n+\Delta t} = J_{0,\nu 32} + J_{1,\nu 32} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 32}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{44,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{12}} \left[\frac{J_{0,\tau 12} + J_{1,\tau 12} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 12}}}{J_{0,\tau 12}} \right], \\
 S_{55,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{23}} \left[\frac{J_{0,\tau 23} + J_{1,\tau 23} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 23}}}{J_{0,\tau 23}} \right], \quad \text{za } 0 < t < t_0, \\
 S_{66,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{31}} \left[\frac{J_{0,\tau 31} + J_{1,\tau 31} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 31}}}{J_{0,\tau 31}} \right],
 \end{aligned} \tag{134}$$

a za slučaj rasterećenja ($t > t_0$)

$$\begin{aligned}
 S_{11,t_n+\Delta t} &= J_{1,\sigma 1} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 1}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 1}} \right], \quad S_{22,t_n+\Delta t} = J_{1,\sigma 2} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 2}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 2}} \right], \\
 S_{33,t_n+\Delta t} &= J_{1,\sigma 3} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 3}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 3}} \right], \quad S_{21,t_n+\Delta t} = J_{1,\nu 21} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 21}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 21}} \right], \\
 S_{31,t_n+\Delta t} &= J_{1,\nu 31} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 31}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 31}} \right], \quad S_{32,t_n+\Delta t} = J_{1,\nu 32} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 32}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 32}} \right], \\
 S_{44,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{12}} \left[\frac{J_{1,\tau 12} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 12}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 12}} \right]}{J_{0,\tau 12}} \right], \\
 S_{55,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{23}} \left[\frac{J_{1,\tau 23} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 23}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 23}} \right]}{J_{0,\tau 23}} \right], \quad \text{za } t > t_0. \\
 S_{66,t_n+\Delta t} &= \frac{1}{G_{31}} \left[\frac{J_{1,\tau 31} \cdot \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 31}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 31}} \right]}{J_{0,\tau 31}} \right].
 \end{aligned} \tag{135}$$

- Za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i oštećenja ($\sigma > \sigma_{th}^D$) iz jednadžbe (127) dobiva se sustav nelinearnih skalarnih jednadžbi koja se može zapisati u sljedećem inkrementalnom obliku:

$$\mathbf{F}(t_n + \Delta t) = \tilde{\mathbf{S}}(t_n + \Delta t) : (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \tag{136}$$

gdje je $\tilde{\mathbf{S}}(t_n + \Delta t)$ efektivna matrica podatljivosti u kojoj su pojedini članovi matrice za slučaj puzanja ($0 < t < t_0$) imaju oblik

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{11, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[J_{0, \sigma 1} + J_{1, \sigma 1} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 1}} \right], \\
 \tilde{S}_{22, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[J_{0, \sigma 2} + J_{1, \sigma 2} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 2}} \right], \\
 \tilde{S}_{33, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[J_{0, \sigma 3} + J_{1, \sigma 3} (t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 3}} \right], \\
 \tilde{S}_{21, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[J_{0, \nu 21} + J_{1, \nu 21} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 21}} \right], \\
 \tilde{S}_{31, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[J_{0, \nu 31} + J_{1, \nu 31} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 31}} \right], \\
 \tilde{S}_{32, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[J_{0, \nu 32} + J_{1, \nu 32} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 32}} \right], \\
 \tilde{S}_{12, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[J_{0, \nu 12} + J_{1, \nu 12} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 12}} \right], \\
 \tilde{S}_{13, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[J_{0, \nu 13} + J_{1, \nu 13} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 13}} \right], \\
 \tilde{S}_{23, t_n + \Delta t} &= \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[J_{0, \nu 23} + J_{1, \nu 23} (t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 23}} \right], \\
 \tilde{S}_{44, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{12}} \frac{M_{44, t_n + \Delta t} \left[J_{0, \tau 12} + J_{1, \tau 12} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 12}} \right]}{J_{0, \tau 12}}, \\
 \tilde{S}_{55, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{23}} \frac{M_{55, t_n + \Delta t} \left[J_{0, \tau 23} + J_{1, \tau 23} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 23}} \right]}{J_{0, \tau 23}}, \\
 \tilde{S}_{66, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{31}} \frac{M_{66, t_n + \Delta t} \left[J_{0, \tau 31} + J_{1, \tau 31} (t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 31}} \right]}{J_{0, \tau 31}},
 \end{aligned}
 \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (137)$$

gdje u jednadžbi (137) veličine oštećenja iznose

$$\begin{aligned}
 M_{44, t_n + \Delta t} &= \sqrt{\left[1 + a_1 (\sigma_{12} + \Delta \sigma_{12})^{b_1} \right] \cdot \left[1 + a_2 (\sigma_{21} + \Delta \sigma_{21})^{b_2} \right]}, \\
 M_{55, t_n + \Delta t} &= \sqrt{\left[1 + a_2 (\sigma_{23} + \Delta \sigma_{23})^{b_2} \right] \cdot \left[1 + a_3 (\sigma_{32} + \Delta \sigma_{32})^{b_3} \right]}, \\
 M_{66, t_n + \Delta t} &= \sqrt{\left[1 + a_3 (\sigma_{31} + \Delta \sigma_{31})^{b_3} \right] \cdot \left[1 + a_1 (\sigma_{13} + \Delta \sigma_{13})^{b_1} \right]},
 \end{aligned}
 \quad (138)$$

a za slučaj rasterećenja ($t > t_0$)

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{11, t_n + \Delta t} &= J_{1, \sigma 1} \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 1}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 1}} \right], \\
 \tilde{S}_{22, t_n + \Delta t} &= J_{1, \sigma 2} \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 2}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 2}} \right], \\
 \tilde{S}_{33, t_n + \Delta t} &= J_{1, \sigma 3} \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\sigma 3}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\sigma 3}} \right], \\
 \tilde{S}_{21, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 21} \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 21}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 21}} \right], \\
 \tilde{S}_{31, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 31} \left[1 + a_1 (\sigma_1 + \Delta \sigma_1)^{b_1} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 31}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 31}} \right], \\
 \tilde{S}_{32, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 32} \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 32}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 32}} \right], \\
 \tilde{S}_{12, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 12} \left[1 + a_2 (\sigma_2 + \Delta \sigma_2)^{b_2} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 12}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 12}} \right], \\
 \tilde{S}_{13, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 13} \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 13}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 13}} \right], \\
 \tilde{S}_{23, t_n + \Delta t} &= J_{1, \nu 23} \left[1 + a_3 (\sigma_3 + \Delta \sigma_3)^{b_3} \right] \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\nu 23}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\nu 23}} \right], \\
 \tilde{S}_{44, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{12}} \frac{J_{1, \tau 12} M_{44, t_n + \Delta t} \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 12}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 12}} \right]}{J_{0, \tau 12}}, \\
 \tilde{S}_{55, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{23}} \frac{J_{1, \tau 23} M_{55, t_n + \Delta t} \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 23}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 23}} \right]}{J_{0, \tau 23}}, \\
 \tilde{S}_{66, t_n + \Delta t} &= \frac{1}{G_{31}} \frac{J_{1, \tau 31} M_{66, t_n + \Delta t} \left[(t + \Delta t)^{\gamma_{\tau 31}} - (t + \Delta t - t_0)^{\gamma_{\tau 31}} \right]}{J_{0, \tau 31}}.
 \end{aligned}
 \tag{139}$$

Za pronalaženje nepoznatih varijabli nelinearna jednačba (136) rješava se po $\Delta \sigma$ pomoću Newton-Rapsonovog algoritma prikazanog za trodimenzijsku formulaciju

$$\Delta \sigma_i^{(i+1)} = \Delta \sigma_i^{(i)} - \frac{F_{i, t_n + \Delta t}^{(i)}}{\left(\frac{dF_{i, t_n + \Delta t}}{d\Delta \sigma_i} \right)^{(i)}}, \tag{140}$$

gdje $(i+1)$ predstavlja trenutni korak iteracije, a $\left(\frac{dF_{i, t_n + \Delta t}}{d\Delta \sigma_i} \right)^{(i)}$ se određuje analitički.

Prethodno prikazani izrazi u inkrementalnom obliku na analogan način su implementirani u podrutinu UMAT kao što je to prikazano dijagramima toka na slikama 66, 67 i 68 za slučaj jednodimenzijske formulacije numeričkog algoritma. Osim toga za ubrzanje konvergencije globalnog iterativnog postupka za slučaj trodimenzijske formulacije konstitutivnog modela izveden je konzistentni tangentni operator, tj. Jacobijeva matrica u obliku:

- za slučaj viskoelastičnosti ($\sigma < \sigma_{th}^D$):

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \epsilon} = [S(t_n + \Delta t)]^{-1}, \quad (141)$$

- za slučaj kombinacije viskoelastičnosti i oštećenja ($\sigma > \sigma_{th}^D$):

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_i}{\partial \Delta \epsilon_j} \right) = \frac{1}{S_{ji, t_n + \Delta t} \left[1 + a_i (b_i + 1) (\sigma_i + \Delta \sigma_i)^{b_i} \right]}, \quad \text{gdje je } i = j, \quad (142)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial \Delta \epsilon_{kl}} \right) = \frac{2 \sqrt{1 + a_i (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})^{b_i}}}{S_{ijkl, t_n + \Delta t} \sqrt{1 + a_j (\sigma_{ji} + \Delta \sigma_{ji})^{b_j}} \left[1 + a_i (b_i + 1) (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})^{b_i} \right]}, \quad \text{gdje je } i \neq j \text{ i } k \neq l. \quad (143)$$

U prethodnim izrazima (142) i (143) indeksi i, j, k, l poprimaju vrijednosti 1, 2 i 3. Ovdje je potrebno naglasiti da u ovako prikazanom sažetom zapisu jednačbi (142) i (143) ne vrijede pravila indeksnog zapisa.

Jednačbama od (133) do (143) prikazana je implementacija konstitutivnog modela u programski kod uz pretpostavku ortotropnog viskoelastičnog ponašanja materijala s ortotropnom raspodjelom oštećenja. Kako je na temelju eksperimentalnih istraživanja za kompozitni materijal i goveđu kortikalnu kost određena samo varijabla oštećenja u osnom smjeru kosti u nastavku rada razmatrat će se slučaj izotropno ponašanje materijala s izotropnom raspodjelom oštećenja. Jasno je da je za određivanje svih parametara materijala potrebno provesti puno veći broj eksperimentalnih istraživanja, nego što je to napravljeno u ovom radu.

Za goveđe kortikalno koštano tkivo parametri materijala određeni u ovom radu prikazani su u tablici 5 gdje viskoelastičnim parametrima J_0 , J_1 i γ u prethodno prikazanoj formulaciji odgovaraju $J_{0,\sigma 1}$, $J_{1,\sigma 2}$ i $\gamma_{\sigma 1}$. Ovi parametri će u daljnjoj analizi zamijeniti sve ostale parametre viskoelastičnosti prema

$$\begin{aligned} J_0 &= J_{0,\sigma 1} = J_{0,\sigma 2} = J_{0,\sigma 3} = J_{0,\tau 12} = J_{0,\tau 23} = J_{0,\tau 31} = J_{0,\nu 12} = J_{0,\nu 23} = J_{0,\nu 31}, \\ J_1 &= J_{1,\sigma 1} = J_{1,\sigma 2} = J_{1,\sigma 3} = J_{1,\tau 12} = J_{1,\tau 23} = J_{1,\tau 31} = J_{1,\nu 12} = J_{1,\nu 23} = J_{1,\nu 31}, \\ \gamma &= \gamma_{\sigma 1} = \gamma_{\sigma 2} = \gamma_{\sigma 3} = \gamma_{\tau 12} = \gamma_{\tau 23} = \gamma_{\tau 31} = \gamma_{\nu 12} = \gamma_{\nu 23} = \gamma_{\nu 31}. \end{aligned} \quad (144)$$

U tablici 5 određeni su i parametri oštećenja a i b , koji u prethodnim zapisima odgovaraju parametrima a_1 i b_1 . Navedeni parametri oštećenja iz tablice 5 zamijenit će sve ostale parametre oštećenja prema

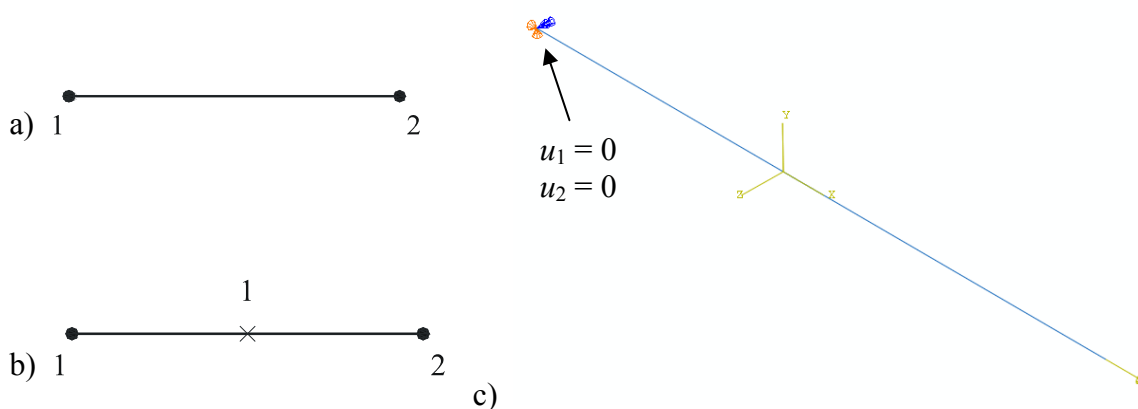
$$\begin{aligned}a &= a_1 = a_2 = a_3, \\b &= b_1 = b_2 = b_3.\end{aligned}\tag{145}$$

Nadalje, iz rezultata eksperimentalnih istraživanja za goveđe kortikalno koštano tkivo iz podatljivosti J_0 slijedi da modul elastičnosti materijala E_0 iznosi 22,35 GPa što slijedi iz $E_0 = 1/J_0$. Dobiveni iznos modula elastičnosti u uzdužnom smjeru za goveđe kortikalno koštano tkivo odgovara podacima iz tablice 1. Na taj način ostale konstante materijala, koje u ovom radu nisu određene, mogu se za slučaj trodimenzijske analize preuzeti iz navedene tablice. Iako su provedeni eksperimenti na epruvetama uzetim u transversalnom smjeru kosti, što je prikazano na slici 37, pripadni parametri materijala na osnovi ovih eksperimenata nisu određeni. Određivanje ovih parametara zahtjeva dodatne eksperimente, što predstavlja smjer budućih istraživanja.

Za provjeru točnosti izvedenog algoritma provedena je simulacija puzanja s naknadnim rasterećivanjem primjenom jednog troosnog konačnog elementa C3D8 (slika 70). Ovdje je prvo dodjeljeno vlačno opterećenje za koje je pripadna deformacija u trenutku $t = 0,001$ s dobivena iz elastične analize. Nakon toga, opterećenje je držano konstantnim te je uslijedila vremenski ovisna analiza puzanja. U trenutku $t_0 = 60$ s modelirano je elastično rasterećenje nakon kojeg je analizirana relaksacija od puzanja u vremenu od $t = 300$ s.

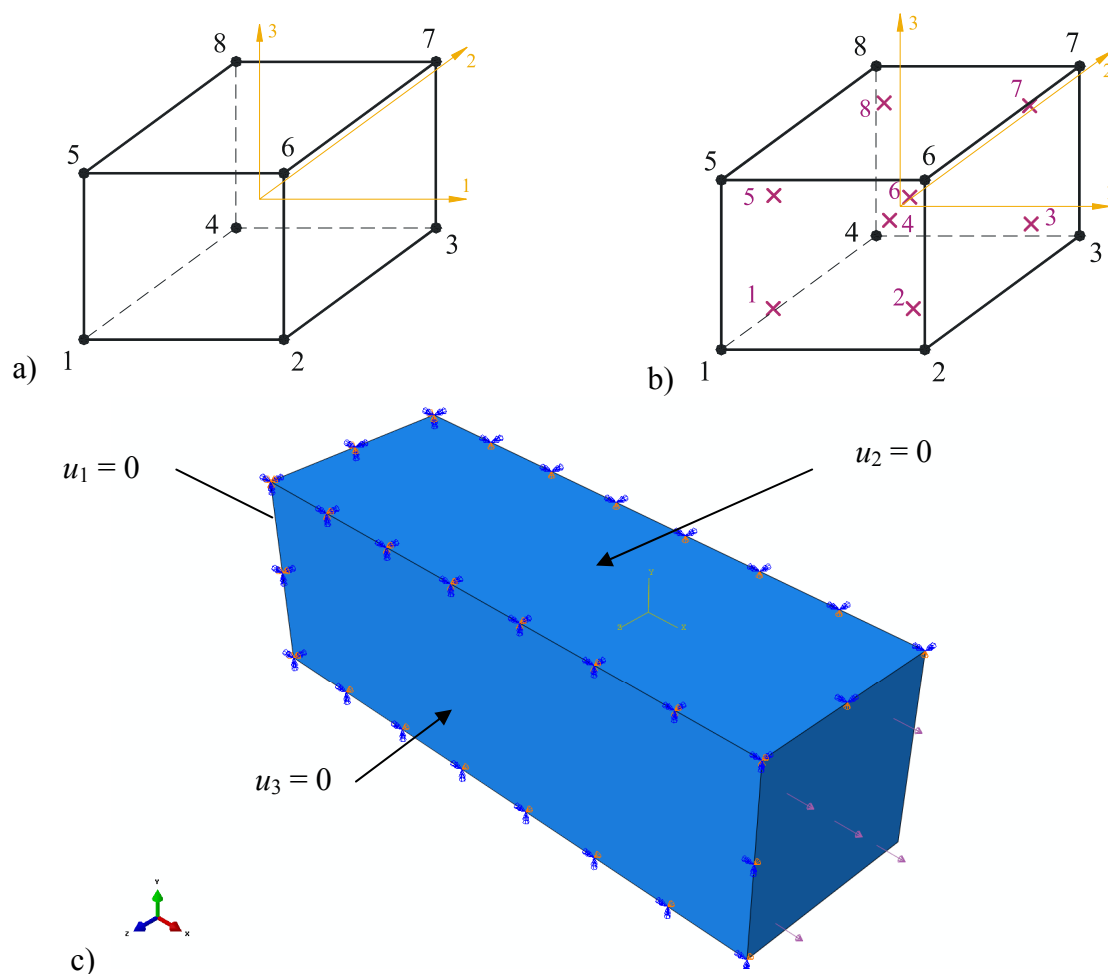
8. USPOREDBA NUMERIČKIH I EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

U ovom poglavlju prikazat će se usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Kao što je već rečeno, za numeričku analizu primijenjen je programski paket ABAQUS [69]. Pritom je za analizu jednoosnih procesa puzanja s naknadnim rasterećivanjem primijenjen ravninski štapni konačni element oznake T2D2 (*“truss”* element). Element ima dva čvora te u svakom čvoru po dva stupnja slobode gibanja, a to su pomaci u pravcu globalnih koordinatnih osi (slika 69). Na slici 69b) je položaj točke integracije korištenog konačnog elementa. U čvoru 1 spriječeni su pomaci, dok je u čvoru 2 narinuta osna sila čiji iznos od koraka do koraka varira, što je prikazano na slici 69c).



Slika 69. Štapni konačni element s dva stupnja slobode T2D2 a) definicija čvorova, b) broj i položaj točke integracije [68] c) narinuti rubni uvjeti

U radu je također za analizu troosnog procesa puzanja i naknadnog rasterećenja metodom konačnih elementa primjenom programskog paketa ABAQUS korišten 8-čvorni konačni element oznake C3D8 prikazan na slici 70a). Slikom 70b) prikazan je broj i položaj točaka integracije, dok su slikom 70c) prikazani narinuti rubni uvjeti simetrije oko osi x , y i z , te vanjsko opterećenje na jednom C3D8 konačnom elementu.



Slika 70. Konačni element C3D8 a) definicija čvorova, b) broj i položaj točaka integracije [68], c) primjenjeni rubni uvjeti

Pokretanje analize u programskom paketu ABAQUS [69] provedeno je pozivanjem programske korisničke rutine UMAT. Način implementacija numeričkog algoritma u FORTRANski kod u kojem je napisana korisnička rutina UMAT prikazan je dijagramom toka na slici 66 za slučaj viskoelastičnog ponašanja (VE), na slici 67 za slučaj sprežanja modela viskoelastičnosti i viskoplastičnosti (VE+VP) te na slici 68 za slučaj sprežanja sva tri modela viskoelastičnosti viskoplastičnosti i oštećenja (VE+D+VP).

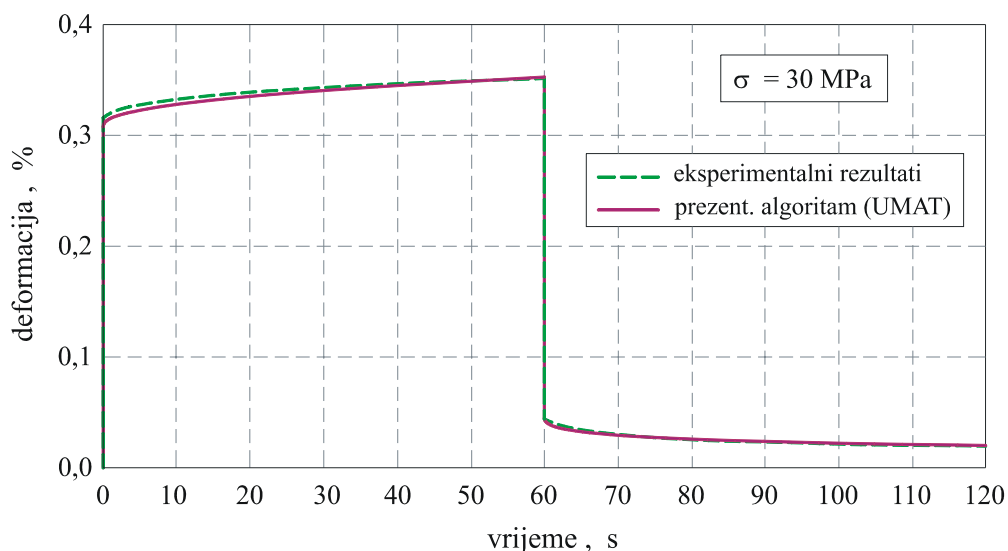
Kao što je to opisano ranije, konstitutivni model viskoelastičnosti spregnut s oštećenjem, koji je u literaturi korišten za modeliranje procesa puzanja kompozitnih materijal, u ovom radu je proširen s viskoplastičnim modelom, koji je također u literaturi primarno korišten za analizu puzanja kompozita. Za verifikaciju ovako spregnutog konstitutivnog modela, u radu je proveden eksperiment puzanja s naknadnim rasterećivanjem na kompozitnom materijalu koji ima slična mehanička svojstva kao ljudska kortikalna kost. Kako predloženi model dobro aproksimira eksperimentalne rezultate, na primjeru analiziranog kompozitnog materijala je pokazano da je prikazani konstitutivni model ispravno verificiran. Nakon verifikacije

pristupilo se validaciji, koja govori o tome koliko je konstitutivan model ispavan za primjenu na druge materijale, u ovom radu za primjenu na kortikalno koštano tkivo. Prikazani konstitutivan model validirao se s eksperimentalnim rezultatima dobivenim na goveđem kortikalnom koštanom tkivu, u okviru vlastitih eksperimentalnih istraživanja. Osim toga model je validiran s eksperimentalnim rezultatima iz literature [30] za ljudsko kortikalno koštano tkivo. U ovom poglavlju prikazani su rezultati verifikacije na primjeru kompozitnog materijala te rezultati validacije na primjeru goveđeg te ljudskog kortikalnog koštanog tkiva.

8.1. Kompozitni materijal

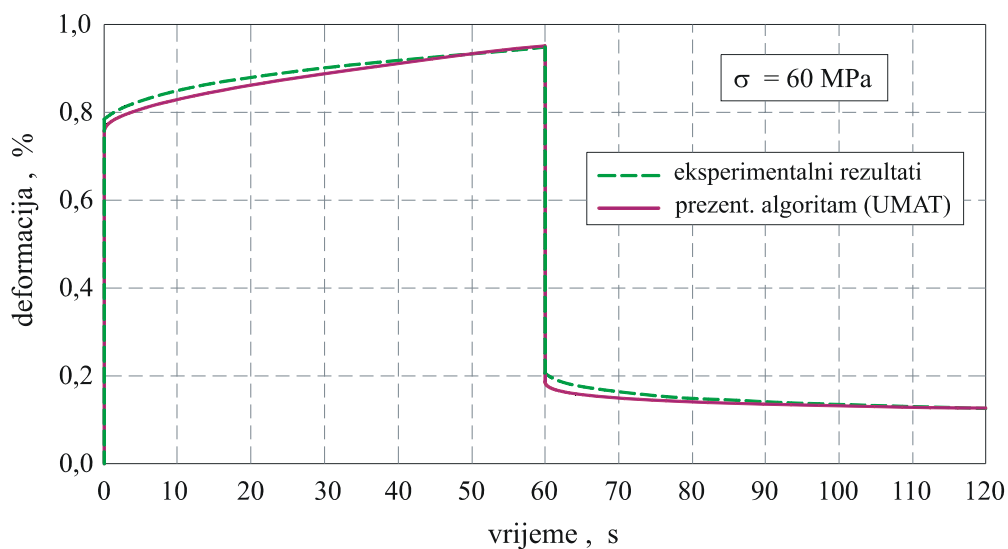
Implementirani numerički algoritam zajedno s parametrima materijala iz tablice 4 primijenjeni su za analizu kompozitnog materijala primjenom štapnog konačnog elementa T2D2. Implementacija modela za sva tri slučaja (viskoelastičnost – VE, viskoplastičnost – VP i oštećenja – D) prikazana je na slikama 66 (VE), 67 (VE+VP) i 68 (VE+D+VP). Usporedba eksperimentalnih vrijednosti deformacije puzanja s naknadnim rasterećivanjem za kompozitni materijal s numeričkim vrijednostima bit će prikazana samo za pojedine vrijednosti naprezanja, ali tako da se verificira sprezanje samo modela viskoelastičnosti i modela viskoplastičnosti (VE+VP) te sprezanje sva tri modela viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja (VE+D+VP), što je predstavljalo i najteži dio implementacije i usporedbe s eksperimentom.

Slikom 71 dana je usporedba vrijednosti deformacije za slučaj puzanja i rasterećenja dobivene eksperimentom i primjenom numeričkog algoritma za kompozitni materijal pri naprezanju od 30 MPa. Pri tom naprezanju model viskoelastičnosti spregnut je s modelom viskoplastičnosti.



Slika 71. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za kompozitni materijal pri naprežanju od 30 MPa

Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu pri naprežanju od 60 MPa dana je na slici 72. Kod ovog naprežanja model viskoelastičnosti je spregnut s modelom oštećenja i s modelom viskoplastičnosti.



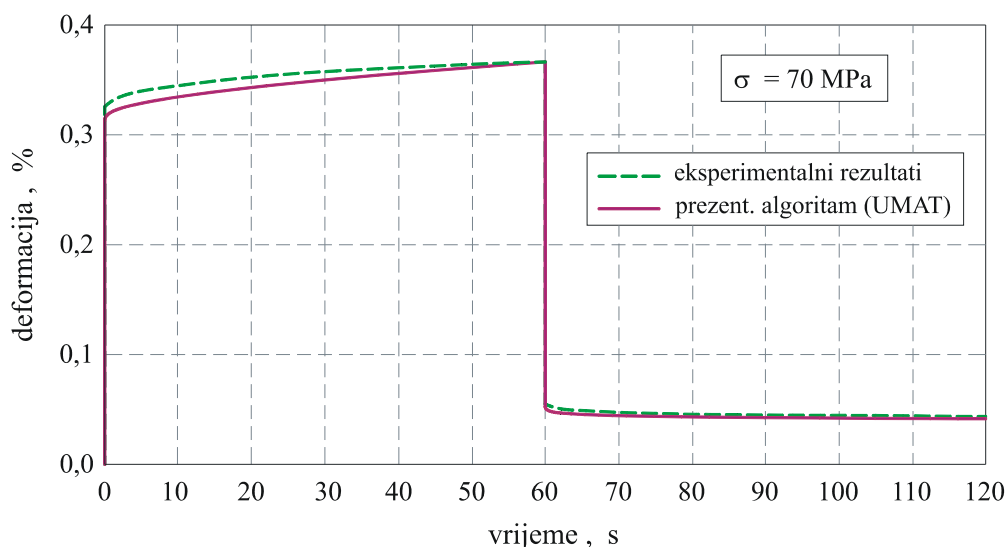
Slika 72. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za kompozitni materijal pri naprežanju od 60 MPa

Iz prikazanih slika vidljivo je jako dobro poklapanje numeričkih rezultata s eksperimentalnim mjerenjima.

8.2. Goveđe kortikalno koštano tkivo

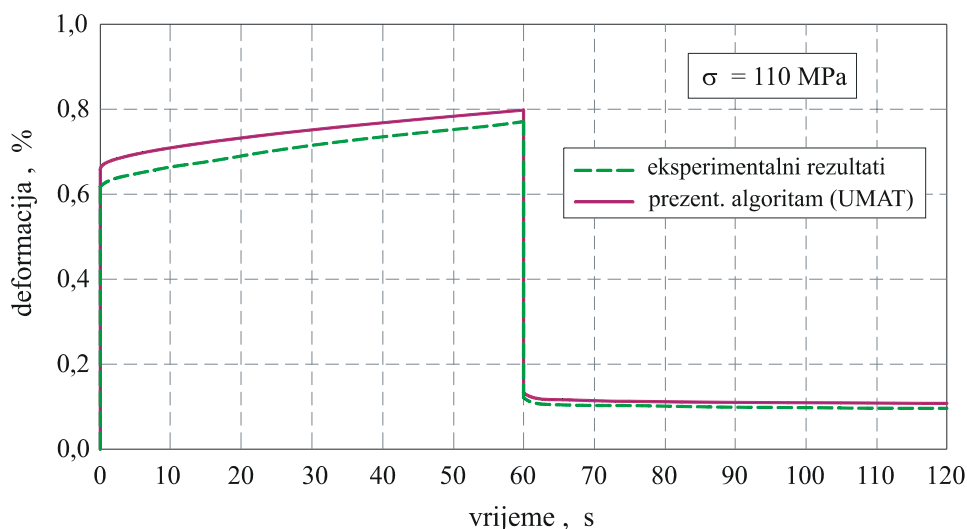
Nadalje, numerički algoritam zajedno s parametrima materijala iz tablice 5, na isti način kao što je to prethodno opisano, primijenjen je za analizu procesa puzanja s naknadnim rasterećivanjem goveđeg kortikalnog koštanog tkiva. Analogan postupak verifikacije konstitutivnog modela i numeričkog algoritma primjenit će se i za slučaj kompozitnog materijala. I ovdje će se prikazati usporedba eksperimentalnih vrijednosti s numeričkim vrijednostima samo za pojedine vrijednosti naprezanja tako da se verificira sprezanje modela viskoelastičnosti i modela viskoplastičnosti (VE+VP) te sprezanje sva tri modela viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja (VE+D+VP).

Na slici 73 dana je usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije za slučaj puzanja i rasterećivanja o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 70 MPa, pri kojem se model viskoelastičnosti spreže s modelom viskoplastičnosti.



Slika 73. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 70 MPa

Slikom 74 dana je usporedba vrijednosti deformacije puzanja i rasterećenja dobivena eksperimentom i prezentiranim numeričkim algoritmom u programski paket ABAQUS za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 110 MPa, pri kojem se model viskoelastičnosti i oštećenja spreže s modelom viskoplastičnosti.



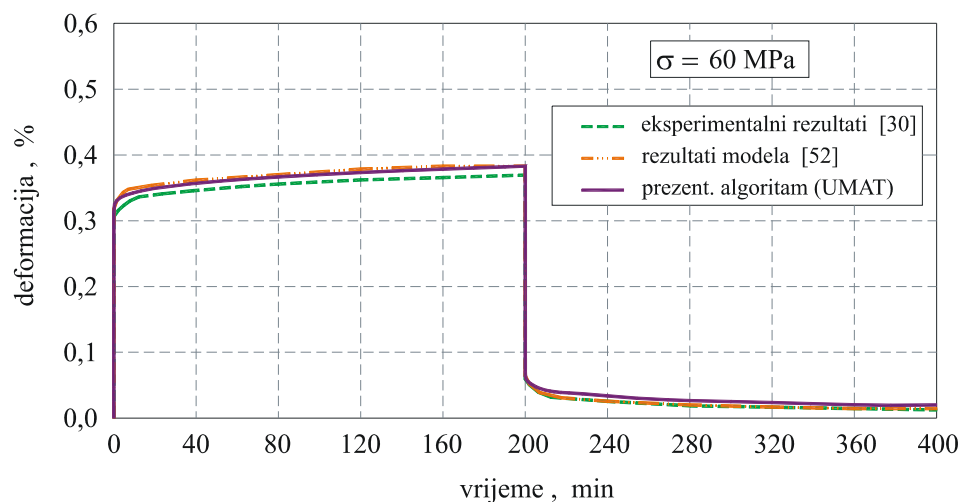
Slika 74. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti ovisnosti deformacije o vremenu za goveđe kortikalno koštano tkivo pri naprezanju od 110 MPa

Poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata i za ovaj materijal je dobro. Malo veća odstupanja nego kod kompozitnog materijala rezultat su malo lošijeg koeficijenta R^2 kod određivanja parametara materijala, koji je mjera točnosti aproksimiranih krivulja prilikom određivanja parametara materijala.

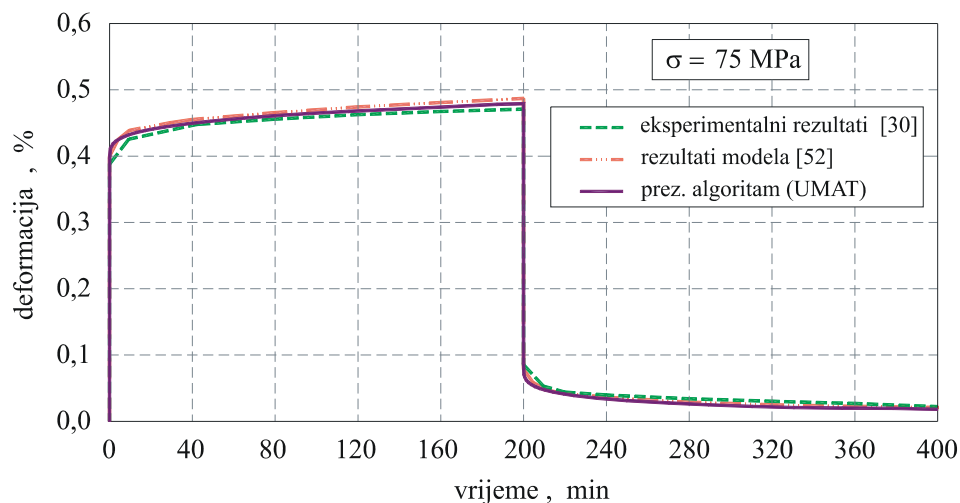
8.3. Ljudsko kortikalno koštano tkivo

Kao što je ranije opisano, za analizu procesa puzanja s naknadnim rasterećivanjem ljudskog kortikalnog koštanog tkiva, zbog nedostatnih eksperimentalnih podataka iz literature, konstitutivni model koji spreže viskoelastičnost i oštećenje je modificiran u odnosu na model za kompozitni materijal i goveđu kortikalnu kost. Primjenom numeričkog algoritma za integriranje ovog modificiranog konstitutivnog modela te parametara materijala prikazanih u tablici 6 provedena je simulacija procesa deformiranja ljudskog kortikalnog koštanog tkiva. Rezultati takve analize prikazani su sljedećim dijagramima. Uspoređivani su eksperimentalni rezultati [30], rezultati modela pronađenog u literaturi [52] te rezultati numeričke analize dobiveni korištenjem prezentiranog modificiranog konstitutivnog modela.

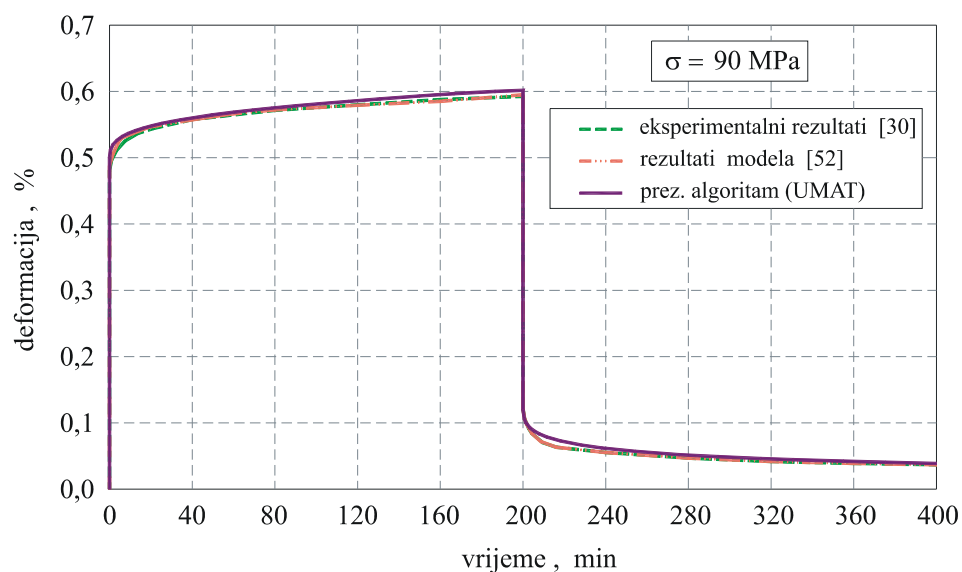
Na slici 75 prikazana je ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortikalno koštano tkivo za naprezanje od 60 MPa kod kojeg je viskoelastičnost spregnuta s viskoplastičnošću. Osim toga na slici 76 odnosno 77 dana je ovisnost deformacije o vremenu za naprezanje u iznosu od 75 MPa odnosno 90 MPa, kod kojeg se u ljudskoj kortikalnoj kosti osim viskoelastičnosti javljaju efekti viskoplastičnosti i oštećenja.



Slika 75. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 60 MPa



Slika 76. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 75 MPa



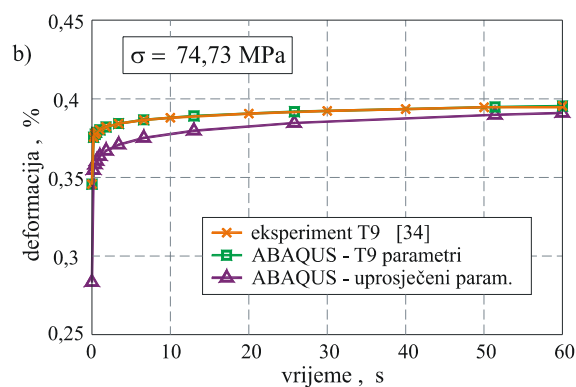
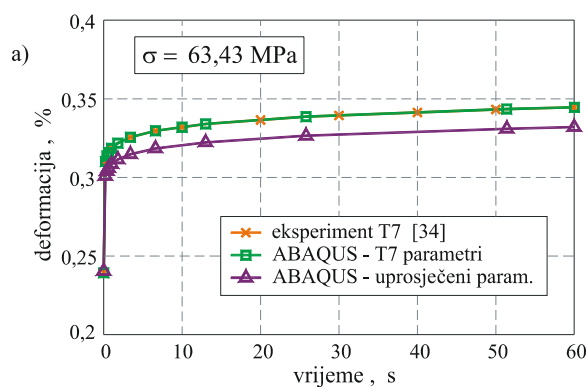
Slika 77. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 90 MPa

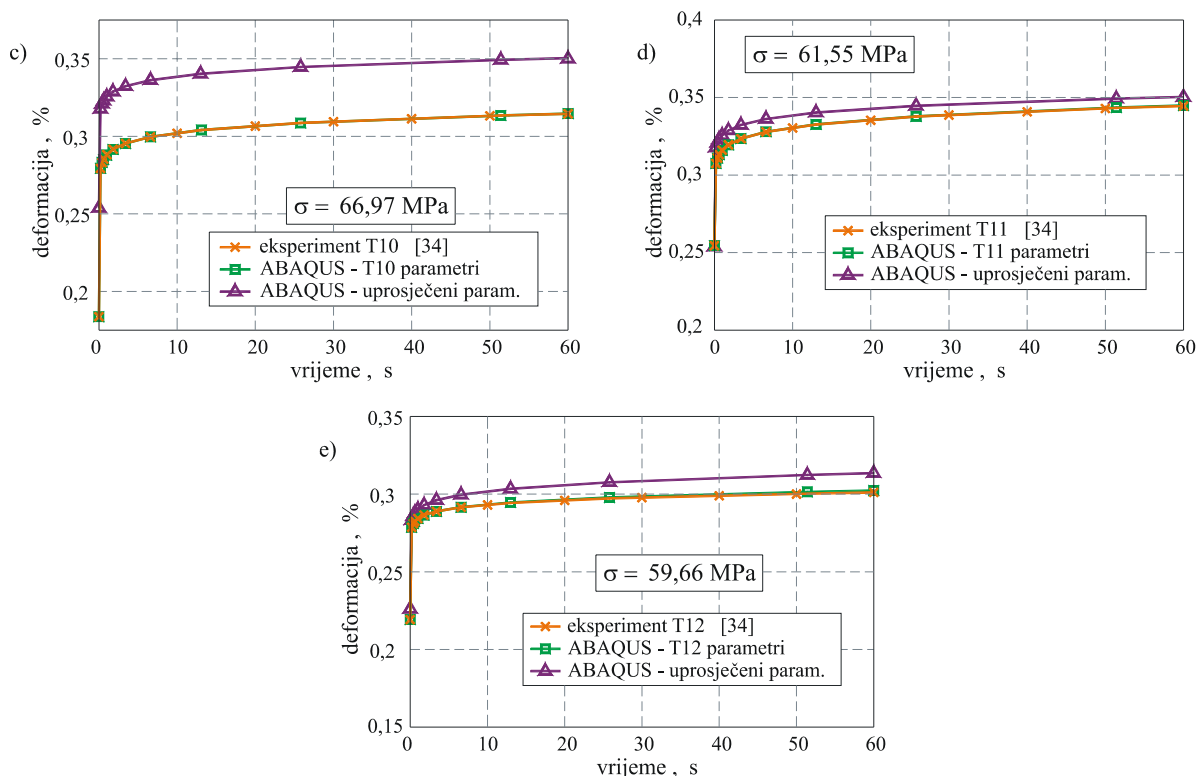
Nadalje je prikazana usporedba eksperimentalnih rezultata puzanja ljudskog kortikalnog košanog tkiva iz literature [34] s rješenjima predloženog numeričkog algoritma.

U radu [34] provedena su eksperimentalna ispitivanja uzoraka koji su uzeti s desne potkoljenične kortikalne kosti 54. godišnjeg muškarca. Testovi puzanja provedeni su primjenom konstantnog vlačnog opterećenja duž uzdužne osi kosti za pet različitih razina opterećenja. Na temelju eksperimentalnih rezultata prikazanih u radu [34] određeni su parametri materijala za viskoelastično ponašanje spregnuto s oštećenjem koji su dani u tablici 7. Za graničnu vrijednost naprezanja kod koje dolazi do akumuliranja oštećenja (σ_{th}) u radu [34] je predložen iznos od 75,3 MPa. Kako u navedenoj literaturi nisu prikazani rezultati testova rasterećivanja, utjecaj viskoplastične deformacije na proces deformiranja kosti nije se mogao uzeti u obzir. Na taj način u analizi puzanja ljudske potkoljenične kortikalne kosti zanemarene su viskoplastične deformacije. U numeričkom modelu, osim parametara materijala koji su dobiveni na temelju ispitivanja na epruvetama označenim s T7, T9, T10, T11 i T12, korištene su srednje vrijednosti parametara koje su također dane u tablici 7. Na slici 78 dana je usporedba ovisnosti deformacije o vremenu između numeričkih rješenja dobivenih u ovom radu i eksperimentalnih rezultata prikazanih u [34].

Tablica 7. Parametri materijalnog modela dobiveni eksperimentalno testom puzanja [34]

Uzorak	Naprezanje, σ (MPa)	Modul podatljivosti, J_0 ($\times 10^{-6}$ MPa $^{-1}$)	Konstanta, J_1 ($\times 10^{-6}$ MPa $^{-1} \cdot s^{-\gamma}$)	Konstanta, γ	Youngov modul, E (GPa)
T7	63,43	37,734	12,482	0,0695	26,501
T9	74,73	46,262	4,621	0,089	21,616
T10	66,97	27,432	15,6	0,055	36,454
T11	61,55	41,349	9,998	0,0929	24,182
T12	59,66	36,74	10,907	0,056	27,218
Srednja vrijednost	-	37,9	10,7	0,0724	26,383



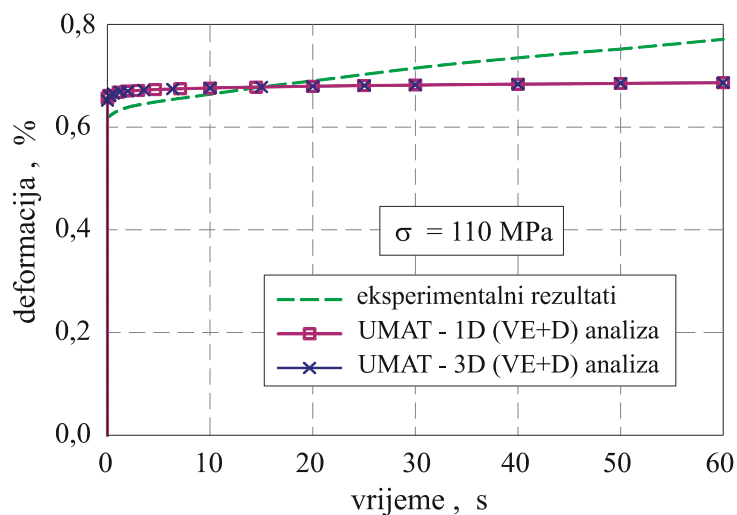


Slika 78. Ovisnost deformacije o vremenu za ljudsko kortiklano koštano tkivo za naprezanja u iznosu od: a) 63,43 MPa, b) 74,73 MPa, c) 66,97 MPa, d) 61,55 MPa i e) 59,66 MPa

8.4. Usporedba jednoosne i troosne analize za goveđe kortikalno koštano tkivo

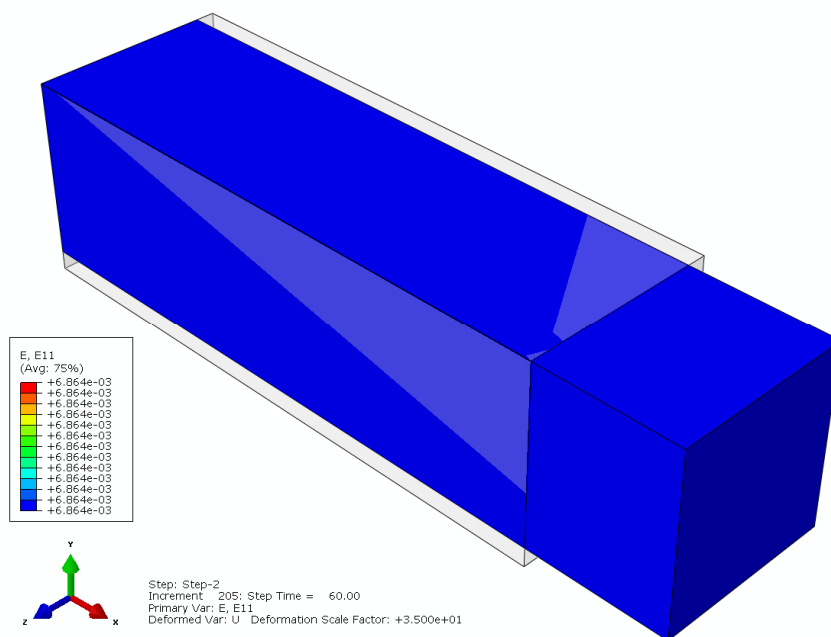
Za verifikaciju trodimenzijskog konstitutivnog modela prikazanog u poglavlju 7.3 i pripadnog numeričkog algoritma koji je implementiran u programski paket Abaqus, provedena je simulacija puzanja s naknadnim rasterećivanjem primjenom trodimenzijske (3D) formulacije numeričkog algoritma te su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim primjenom jednodimenzijske (1D) formulacije numeričkog algoritma.

3D analiza provedena je primjenom trodimenzijskog C3D8 konačnog elemeta iz programskog paketa Abaqus. Numerička analiza je provedena na analogan način kako je to već opisano u poglavlju 8.1 do 8.3. Rezultati ovih dviju analiza prikazani su na dijagramu sa slike 79. Kao što se može uočiti sa ove slike, rezultati dobiveni trodimenzijskim modelom u potpunosti odgovaraju rezultatima jednodimenzijskog modela.



Slika 79. Usporedba jednodimenzijske i trodimenzijske analize puzanja za goveđe kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 110 MPa

Slikom 80 prikazana je raspodjela deformacije puzanja u trenutku pred rasterećenje kako bi se deformacija od 0,67 % mogla povezati sa slikom 79. Na slici je prikazan i početni nedeformirani oblik konačnog elementa, a faktor povećanja deformiranog oblika iznosi 35 puta.



Slika 80. Analiza puzanja u trenutku $t=60$ s za goveđe kortiklano koštano tkivo za naprezanje od 110 MPa u programu Abaqus

9. ZAKLJUČAK

Osnovni cilj ovog rada bio je pokazati da se eksperimentalni rezultati za kortikalno koštano tkivo dobiveni cikličkim puzanjem s naknadnim rasterećivanjem uz povećanje opterećenja u svakom ciklusu mogu dobro opisati prikazanim konstitutivnim modelom sprežući elemente viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja. Predloženi konstitutivan model, uz parametre materijala određene na osnovu eksperimentalnih istraživanja, dobro opisuje deformaciju puzanja i deformaciju rasterećenja kortikalnoga koštanoga tkiva za različite razine opterećenja.

U početnim fazama istraživanja, na temelju eksperimentalnih podaka iz literature [30, 34] stvarao se vlastiti konstitutivni model te su se određivali potrebni parametri materijala. Slijed tih događaja tekao je na ovdje opisani način. U prvoj fazi istraživanja, za izvođenje konstitutivnog modela i pripadnog numeričkog algoritma eksperimentalni rezultati bili su preuzeti iz literature [34]. Na temelju rezultata jednoosnog rastezanja epruveta uzetih s podkoljenične ljudske kortikalne kosti predložena je funkcija gustoće energije deformiranja. Nakon toga određeni su parametri u konstitutivnim jednadžbama. U cilju pojednostavljenja numeričkog postupka, zanemario se utjecaj malih zaostalih plastičnih deformacija koje se pojavljuju pri cikličkom opterećivanju kortikalne kosti. Konstitutivne jednadžbe, koje sprežu mehanizme oštećenja s efektima viskoelastičnosti, izvedene su uz pretpostavku malih deformacija. Dekompozicija deformacije izvedena je na vremenski ovisan viskoelastičan dio i nelinearan dio uslijed oštećenja. Ovdje je pretpostavljeno da vremenski ovisno naprezanje i oštećenje utječu na viskoelastičnu deformaciju kroz vremenski ovisno efektivno naprezanje. Osim toga, pretpostavljeno je izotropno oštećenje. Vremenski ovisne konstitutivne jednadžbe zapisane su u inkrementalnom obliku primjenom metode konačnih razlika. Za njihovo rješavanje na razini materijalne točke konačnog elementa izveden je pripadni numerički algoritam. Najprije je izvedena jednodimenzijska formulacija numeričkog algoritma za koju su se parametri materijala odredili iz eksperimentalnih rezultata istraživanja. Algoritmi su se ugradili u programski paket ABAQUS [69] primjenom korisničke rutine UMAT. Točnost numeričke procedure testirana je usporedbom dobivenih rješenja s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima iz literature [34].

Kako u literaturi [34] nije provedeno ispitivanje naknadnog rasterećenja nakon vlačnog puzanja iz kojeg bi se bolje odredili viskoelastični parametri, te imao bolji uvid u iznos plastične deformacije, u drugoj fazi istraživanja, za točniji opis konstitutivnog modela, eksperimentalni rezultati preuzeti su iz literature [30]. Ovdje su vlačni pokusi puzanja s naknadnim rasterećenjem napravljeni na ljudskoj kortikalnoj kosti opterećivanjem u više ciklusa. To je omogućilo točnije određivanje viskoelastičnih parametara, kao i bolju analizu zaostalih deformacija. Pritom se javio problem procjene graničnog naprezanja pri kojem dolazi do akumuliranja oštećenja jer eksperimentalni rezultati dani u ovom radu za to nisu bili dovoljni. Ispitivanjima cikličkog puzanja s naknadnim rasterećenjem u ovoj literaturi dan je podatak o zaostaloj trajnoj deformaciji, pomoću koje se u model mogla uključiti i viskoplastična deformacija u obliku često primjenjivanog Zapas-Crissmanovog modela. Osim toga, u ovoj literaturi nema podataka o vremenu do loma kosti uslijed puzanja pri opterećenju većem od graničnog naprezanja kada počinje akumuliranje oštećenja. Kako su ovi podaci neophodni za točno definiranje parametara konstitutivnog modela nametnula se potreba za provedbom vlastitih eksperimenata.

U trećoj fazi istraživanja, u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, provedeni su pokusi jednoosnog vlačnog puzanja s naknadnim rasterećenjem na uzorcima iz kompozitnog materijala tj. umjetne polimerne kosti odnosno epoksidne smole ojačane kratkim staklenim vlaknima, koja ima mehanička svojstva slična svojstvima ljudskog kortikalnog koštanog tkiva te pokusi jednoosnog vlačnog i tlačnog puzanja s naknadnim rasterećenjem na uzorcima od goveđe kortikalne kosti. Ovdje se očekivalo „rasipanje“ eksperimentalnih rezultata za slučaj istraživanja na goveđoj kosti. Da bi se osigurala ponovljivost rezultata, najprije se provelo istraživanje na kompozitnom materijalu tj. umjetnoj polimernoj kosti. Isto tako su se u numeričkim simulacijama pojavili različiti problemi kao što su numerička stabilnost i problemi konvergencije koje su se u ovoj fazi riješili. Krajnji cilj je bio provjera numeričkih rezultata usporedbom s rezultatima iz literature te ocjena numeričke točnosti i učinkovitosti izvedenih algoritama.

Navedenim cikličkim eksperimentom puzanja i naknadnog rasterećenja, u kojem je period rasterećenja pet puta dulji od ukupnog vremena puzanja, određivana je veličina zaostale plastične deformacije. Složeni ciklus opterećivanja (opterećenje – držanje opterećenja – rasterećenje - držanje rasterećenja - ponovljeno opterećenje) ponavljan je više puta, a pri svakom novom ciklusu povećava se iznos naprezanja puzanja. Na temelju eksperimentalnih

rezultata najprije je određeno granično naprezanje do kojeg se uzorak kortikalnoga koštanoga tkiva ponaša linearno viskoelastično, a iznad kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja. Zatim su se za vrijednosti opterećenja ispod graničnog naprezanja odredili viskoelastični parametri, dok su se parametri akumuliranja oštećenja određivali analizom eksperimentalnih podataka vremena puzanja do loma za vrijednosti opterećenja iznad graničnog naprezanja. Viskoplastični parametri određeni su iz cikličkih ispitivanja puzanja s naknadnim rasterećivanjem i to na kraju procesa rasterećenja kada se stabilizirala trajna viskoplastična deformacija. Navedeni parametri materijala određivani su metodom najmanjih kvadrata odstupanja. Također se analizirao utjecaj viskoplastične deformacije na proces deformiranja te je provedena analiza ovisnosti viskoplastične deformacije o akumuliranom oštećenju. Osim vlačnog ispitivanja puzanja, provelo se tlačno ispitivanje puzanja za prethodno opisani složeni ciklus opterećivanja. U dostupnoj literaturi mogu se pronaći rezultati za tlačno ispitivanje relaksacije kortikalne kosti [36, 44], no ne i za tlačno ispitivanje puzanja sa složenim ciklusima opterećivanja. Cilj je bio usporediti ponašanje kortikalne kosti za slučaj vlačnog i tlačnog puzanja. Kao što je to objašnjeno u poglavlju 5.2.2. i 5.2.3. zbog nedovoljnog broja epruveta ova usporedba nije do kraja napravljena.

U drugom djelu rada, predložen je novi jednodimenzijski konstitutivni model za modeliranje viskoelastičnosti i viskoplastičnosti spregnutih s akumuliranjem oštećenja za opisivanje procesa deformiranja kortikalnoga koštanoga tkiva za slučaj puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Pri tome su parametri materijala konstitutivnog modela određeni iz eksperimentalnih vlastitih istraživanja i eksperimentalnih podataka iz literature [30]. Za rješavanje jednadžbi konstitutivnog modela izveden je numerički algoritam čija je točnost testirana usporedbom dobivenih rješenja s eksperimentalnim vlastitim rješenjima te eksperimentalnim i numeričkim rezultatima iz literature.

Na temelju eksperimentalnih rezultata prikazanih u odjeljku 6.1., određeni su parametri materijala za analizirani kompozitni materijal. Ovdje je za graničnu vrijednost kod koje dolazi do akumuliranja oštećenja dobivena vrijednost od 32,1 MPa, odnosno približno 30 % od vlačne čvrstoće materijala. Dobiveni iznos je u skladu s rezultatom iz literature [45, 46, 99] za kompozit čija je uretanska matrica također ojačana staklenim vlaknima. Iz ostalih eksperimentalnih rezultata također slijedi da ova dva kompozita pokazuju slično mehaničko ponašanje. Iz rezultata je vidljivo da za kompozitni materijal analiziran u ovom radu viskoplastična deformacija tijekom eksperimenta puzanja iznosi približno 10 % od ukupne deformacije puzanja. Sličan odnos između viskoplastične i ukupne deformacije dobiven je i

za goveđe kortikalno koštano tkivo (odjeljak 5.2. i 6.2.). Za razliku od toga, kod kompozitnog materijala analiziranog u literaturi [45, 46, 99] taj odnos je otprilike 5 %. Iz tog razloga je u navedenom radu u formulaciji jednodimenzijskog konstitutivnog modela zanemaren utjecaj viskoplastične deformacije. Analizom goveđeg koštanog tkiva i kompozitnog materijala u ovom radu, dobivena viskoplastična deformacija je u iznosu od 10 % od ukupne deformacije i nije u toj mjeri zanemariva. Za znatno pojednostavljenje trodimenzijske (3D) formulacije konstitutivnog i numeričkog modela, zanemaren je utjecaj viskoplastične deformacije na proces deformiranja navedenih materijala. Razlog tome je i činjenica što je za formuliranje trodimenzijskog viskoplastičnog konstitutivnog modela potrebno dosta više eksperimentalnih rezultata iz kojih bi slijedili i pripadni parametri materijala, što izlazi iz okvira ovog rada. Na taj način je jednodimenzijski model proširen na trodimenzijsku formulaciju koja spreže ortotropno viskoelastično ponašanje materijala s ortotropnom raspodjelom oštećenja.

Ovaj rad također može biti predložak inženjerima kao vodič u razvoju novih sintetičkih biomimetičkih i bioinspiriranih materijala za široki raspon inženjerske primjene [6]. Pošto se dijelovi predloženoga konstitutivnoga modela koriste u literaturi za opisivanje polimernih i kompozitnih materijala, time je prvobitna ideja rada provođenje eksperimentalnih istraživanja na kompozitnom materijalu koji ima slično mehaničko ponašanje kao ljudsko kortikalno koštano tkivo kako bi se napravila verifikacija predloženoga konstitutivnoga modela kojim će se kasnije opisati ponašanje goveđeg kortikalnog koštanog tkiva. Nakon provedenih eksperimenata proizlaze i par usporebnih crtica. Kod goveđega kortikalnoga koštanoga tkiva prilikom rasterećenja brži je povratak viskoelastičnih deformacija nego kod kompozitnoga materijala. Kompozitnom materijalu u odnosu na goveđe kortikalno koštano tkivo treba više vremena u fazi rasterećenja nakon puzanja da se ustabi trajna viskoplastična deformacija.

9.1. Rasprava

Uzimanjem epruveta iz goveđeg kortikalnog koštanog tkiva kao što je i prikazano na slici 24, izostavio se utjecaj endosta i periosta koji su u uvodnom dijelu opisani. Standardni protokoli ispitivanja kortikalnog koštanog tkiva nisu mogući, a također i geometrija uzoraka je različita u raznim literaturnim izvorima. Pošto se svi eksperimenti rade *in vitro* time je izostavljen i mehanizam pregradnje koji se počinje aktivirati kada u kortikalnom koštanom tkivu dolazi do akumulacije oštećenja. Bilo bi dobro analizirati mikrostrukturu materijala prije eksperimentalnog ispitivanja te nakon ispitivanja s akumuliranim oštećenjem. Budući da je

eksperimentalni dio proveden samo na jednom govedu, tj na dvijema (matatarzalnim) kostima ispod skočnog zgloba, premali je broj eksperimentalnih uzoraka govedega kortikalnoga koštanoga tkiva.

Mjesta hvatišta mišića također mogu uzrokovati da se longitudinalni smjer ne poklapa u potpunosti s anatomskim uzdužnim smjerom.

Određivanje mehaničkih svojstava kosti je teško i zahtjevno, uglavnom zbog složene i hijerarhijske strukture kosti. Mehanička svojstva su pod utjecajem različitih čimbenika, kao što su anatomske položaj, veličina uzorka i oblik, mehanizam opterećenja te brzina deformiranja. Eksperimenti *in vitro* pružaju samo određivanje općih svojstava koja se temelje na ograničenom broju uzoraka.

Kao što je to već ranije rečeno, osnovni je cilj rada bio potvrditi hipotezu da će se primjenom formulacija sličnih onima za inženjerske materijale izvesti konstitutivni model za akumuliranje oštećenja u kortikalnom koštanom tkivu koji će omogućiti sprežanje mehanizma oštećenja s efektima viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Na taj način je težište rada bilo na formuliranju konstitutivnog modela i razvoju numeričkog algoritma za rješavanje konstitutivnih jednadžbi te implementaciji algoritma u formulaciju konačnih elemenata. Pritom je namjera bila iz dobivenih eksperimentalnih rezultata odrediti fenomenološko ponašanje koštanog tkiva koje je moguće opisati predloženim konstitutivnim modelom. Kako je opisano u 5. poglavlju, većina eksperimenata u ovom radu, osim na puzalici CEAST 6110, provedena je na kvazistatičkoj kidalici MESSPHYSIK BETA 50-5 s maksimalnim opterećenjem ± 50 kN. Budući se radi o kidalici pogodnijoj za veća opterećenja od u ovom radu primjenjenih, to predstavlja mogući izvor grešaka u rezultatima eksperimentalnih istraživanja. Određivanjem mjerne nesigurnosti od strane Laboratorija za ispitivanje mehaničkih svojstava, Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, navedena kidalica za opterećenja od 50 do 500 N spada u klasu 3 (± 3 %), od 500 do 1000 N spada u klasu 2 (± 2 %), a od 1 kN do 50 kN pripada klasi 1 (± 1 %). Osim toga, kako je u radu već ranije napomenuto, ponovljivost eksperimentalnih rezultata na koštanom tkivu je dosta problematična. Iz navedenih razloga, analiza mjerne nesigurnosti i procjena točnosti parametara materijala koja o toj nesigurnosti ovisi, nisu predstavljali predmet ovog rada. Detaljnija usporedba eksperimentalnih rezultata prikazanih u ovom radu s pripadnim koji se planiraju dobiti primjenom kidalice s manjim maksimalnim opterećenjem predstavlja područje budućeg istraživanja. Osim toga, plan je ovakvu detaljniju analizu popratiti s točnijim mikromehaničkim numeričkim modeliranjem.

Iz provedenih istraživanja može se zaključiti da prikazani konstitutivan model koji spreže model viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i oštećenja može dovoljno točno opisati proces puzanja s naknadnim rasterećenjem kako za kompozitni materijal, tako i za kortikalno koštano tkivo. Isto tako je zaključeno da se ovisnost viskoplastične deformacije o akumuliranom oštećenju može aproksimirati bilinearно, pravcima koji se sijeku u točki početka akumuliranja oštećenja. Iz rezultat se može zaključiti da akumuliranje oštećenja u epruvetama koje su uzete u transversalnom smjeru počinje kod niže granične vrijednosti naprezanja (σ_{th}^D) nego u longitudinalnom smjeru za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Također i do loma dolazi pri puno manjim naprežanjima.

9.2. Znanstveni doprinos

Najvažniji doprinosi rada su:

- Istražene su i prikazane razlike u mehaničkom ponašanju goveđeg kortikalnog koštanog tkiva i kompozitnog materijala koji ima slično mehaničko ponašanje kao kortikalna kost.
- Na temelju eksperimentalnih rezultata određeno je granično naprežanje kod kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja, odnosno akumuliranja viskoplastične deformacije u goveđem kortikalnom koštanom tkivu i analiziranom kompozitnom materijalu.
- Određena je ovisnost viskoplastične deformacije o akumuliranom oštećenju u goveđem kortikalnom koštanom tkivu i analiziranom kompozitnom materijalu, što se za slučaj cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem ne može pronaći u dostupnoj literaturi.
- Na temelju eksperimentalnih rezultata i primjenom formulacija sličnih onima za inženjerske materijale predložen je jednodimenzijski i trodimenzijski konstitutivni model za akumuliranje oštećenja u kortikalnom koštanom tkivu koji omogućava sprežanje mehanizma oštećenja s efektima viskoelastičnosti, viskoplastičnosti i ortotropije te su određeni pripadni parametri materijala.
- Izveden je jednodimenzijski i trodimenzijski numerički algoritam za rješavanje predloženih konstitutivnih jednadžbi na razini materijalne točke te je implementiran u formulaciju konačnih elemenata i testiran usporedbom s eksperimentalnim rezultatima.

9.3. Buduća istraživanja

Za provedena eksperimentalna istraživanja cikličkog puzanja i naknadnog rasterećenja u tlaku na epruветama u longitudinalnom smjeru i u vlaku na epruветama u transverzalnom smjeru, plan je odrediti parametre materijala. Isto tako u okviru eksperimentalnih ispitivanja cilj je istražiti utjecaj brzine deformiranja na ponašanje kortikalnog koštanog tkiva za slučaj tlačnog i vlačnog cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Osim toga, na temelju eksperimentalnih rezultata dobivenih iz navedenih ispitivanja odredilo bi se granično naprezanje kod kojeg dolazi do akumuliranja oštećenja, odnosno akumuliranja viskoplastične deformacije u goveđem kortikalnom koštanom tkivu. Isto tako, plan je detaljnije istražiti ovisnost viskoplastične deformacije o akumuliranom oštećenju te istražiti mogućnost sprežanja viskoplastičnosti i oštećenja u konstitutivnom modelu. S određenim parametrima materijala u transverzalnom smjeru mogao bi se tenzor oštećenja s izotropnog proširiti ovim saznanjem na transverzalno izotropan što bi se više približilo realnom ponašanju kortikalne kosti. Također je plan detaljnije istražiti mikrostrukturu kosti i primijeniti mikromehaničke modele za numeričko modeliranje procesa deformiranja koštanog tkiva.

LITERATURA

- [1] Jelčić, J., Odnos polimorfizme gena za vitamin-D receptor, alfa-1 lanac kolagena I i estrogeni receptor i koštane mase u bolesnika s hipertireozom, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.
- [2] www.gla.ac.uk/ibls/US/fab/tutorial/generic/bone2.html.
- [3] Natali, A.N. and Meroi, E.A., A review of the biomechanical properties of bone as a material, *Journal of Biomedical Engineering*, 11(4), 266-276, 1989.
- [4] Doblaré, M., García, J.M., and Gómez, M.J., Modelling bone tissue fracture and healing: a review, *Engineering Fracture Mechanics*, 71(13-14), 1809-1840, 2004.
- [5] Garcia, D., Elastic Plastic Damage Laws for Cortical Bone, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, 2006.
- [6] Hamed, E., Lee, Y., and Jasiuk, I., Multiscale modeling of elastic properties of cortical bone, *Acta Mechanica*, 213(1-2), 131-154, 2010.
- [7] Reilly, D.T. and Burstein, A.H., The elastic and ultimate properties of compact bone tissue, *Journal of Biomechanics*, 8(6), 393-396, IN9-IN11, 397-405, 1975.
- [8] Currey, J.D., The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone, *Journal of Biomechanics*, 21(2), 131-139, 1988.
- [9] Jepsen, K.J. and Davy, D.T., Comparison of damage accumulation measures in human cortical bone, *Journal of Biomechanics*, 30(9), 891-894, 1997.
- [10] Lakes, R.S., Katz, J.L., and Sternstein, S.S., Viscoelastic properties of wet cortical bone--I. Torsional and biaxial studies, *Journal of Biomechanics*, 12(9), 657-678, 1979.
- [11] Lang, S.B., Elastic coefficients of animal bone, *Science*, 165(3890), 287-288, 1969.
- [12] Lang, S.B., Ultrasonic Method for Measuring Elastic Coefficients of Bone and Results on Fresh and Dried Bovine Bones, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, BME-17(2), 101-105, 1970.
- [13] Pithioux, M., Lasaygues, P., and Chabrand, P., An alternative ultrasonic method for measuring the elastic properties of cortical bone, *Journal of Biomechanics*, 35(7), 961-968, 2002.
- [14] Rho, J.-Y., An ultrasonic method for measuring the elastic properties of human tibial cortical and cancellous bone, *Ultrasonics*, 34(8), 777-783, 1996.
- [15] Hoffler, C.E., Moore, K.E., Kozloff, K., Zysset, P.K., Brown, M.B., and Goldstein, S.A., Heterogeneity of bone lamellar-level elastic moduli, *Bone*, 26(6), 603-609, 2000.
- [16] Rho, J.-Y., Tsui, T.Y., and Pharr, G.M., Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation, *Biomaterials*, 18(20), 1325-1330, 1997.
- [17] Wirtz, D.C., Schiffers, N., Pandorf, T., Radermacher, K., Weichert, D., and Forst, R., Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur, *Journal of Biomechanics*, 33(10), 1325-1330, 2000.
- [18] Wachter, N.J., Krischak, G.D., Mentzel, M., Sarkar, M.R., Ebinger, T., Kinzl, L., Claes, L., and Augat, P., Correlation of bone mineral density with strength and microstructural parameters of cortical bone in vitro, *Bone*, 31(1), 90-95, 2002.

- [19] Helgason, B., Perilli, E., Schileo, E., Taddei, F., Brynjólfsson, S., and Viceconti, M., Mathematical relationships between bone density and mechanical properties: A literature review, *Clinical Biomechanics*, 23(2), 135-146, 2008.
- [20] Rho, J.Y., Kuhn-Spearing, L., and Zioupos, P., Mechanical properties and the hierarchical structure of bone, *Medical Engineering and Physics*, 20(2), 92-102, 1998.
- [21] Pope, M.H. and Outwater, J.O., Mechanical properties of bone as a function of position and orientation, *Journal of Biomechanics*, 7(1), 61-66, 1974.
- [22] Turner, C.H., Rho, J., Takano, Y., Tsui, T.Y., and Pharr, G.M., The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: results from two microscopic measurement techniques, *Journal of Biomechanics*, 32(4), 437-441, 1999.
- [23] Bayraktar, H.H., Morgan, E.F., Niebur, G.L., Morris, G.E., Wong, E.K., and Keaveny, T.M., Comparison of the elastic and yield properties of human femoral trabecular and cortical bone tissue, *Journal of Biomechanics*, 37(1), 27-35, 2004.
- [24] Macione, J., Depaula, C.A., Guzelsu, N., and Kotha, S.P., Correlation between longitudinal, circumferential, and radial moduli in cortical bone: effect of mineral content, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 3(5), 405-413, 2010.
- [25] Reilly, D.T. and Burstein, A.H., The mechanical properties of cortical bone, *Journal of Bone and Joint Surgery - Series A*, 56(5), 1001-1022, 1974.
- [26] Barak, M.M., Currey, J.D., Weiner, S., and Shahar, R., Are tensile and compressive Young's moduli of compact bone different?, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2(1), 51-60, 2009.
- [27] Huang, H.L., Tsai, M.T., Lin, D.J., Chien, C.S., and Hsu, J.T., A new method to evaluate the elastic modulus of cortical bone by using a combined computed tomography and finite element approach, *Computers in Biology and Medicine*, 40(4), 464-468, 2010.
- [28] Hansen, U., Zioupos, P., Simpson, R., Currey, J.D., and Hynd, D., The effect of strain rate on the mechanical properties of human cortical bone, *Journal of Biomechanical Engineering*, 130(1), 011011-1 - 011011-8, 2008.
- [29] Melnis, A.E. and Knets, I.V., Effect of the rate of deformation on the mechanical properties of compact bone tissue, *Mechanics of Composite Materials*, 18(3), 358-363, 1982.
- [30] Melnis, A.É., Knets, I.V., and Moorlat, P.A., Deformation behavior of human compact bone tissue upon creep under tensile testing, *Mechanics of Composite Materials*, 15(5), 574-579, 1980.
- [31] Fondrk, M., Bahniuk, E., Davy, D.T., and Michaels, C., Some viscoplastic characteristics of bovine and human cortical bone, *Journal of Biomechanics*, 21(8), 623-630, 1988.
- [32] Fondrk, M.T., Bahniuk, E.H., and Davy, D.T., Inelastic strain accumulation in cortical bone during rapid transient tensile loading, *Journal of Biomechanical Engineering*, 121(6), 616-621, 1999.
- [33] Phillips, A., Pankaj, P., May, F., Taylor, K., Howie, C., and Usmani, A., Constitutive models for impacted morsellised cortico-cancellous bone, *Biomaterials*, 27(9), 2162-2170, 2006.

- [34] Parsamian, G.P., Damage mechanics of human cortical bone, Ph.D, West Virginia University 2001.
- [35] Wang, X. and Nyman, J.S., A novel approach to assess post-yield energy dissipation of bone in tension, *Journal of Biomechanics*, 40(3), 674-677, 2007.
- [36] Nyman, J.S., Leng, H., Neil Dong, X., and Wang, X., Differences in the mechanical behavior of cortical bone between compression and tension when subjected to progressive loading, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2(6), 613-619, 2009.
- [37] Turner, C.H., Wang, T., and Burr, D.B., Shear Strength and Fatigue Properties of Human Cortical Bone Determined from Pure Shear Tests, *Calcified Tissue International*, 69(6), 373-378, 2001.
- [38] Zioupos, P. and Casinos, A., Cumulative damage and the response of human bone in two-step loading fatigue, *Journal of Biomechanics*, 31(9), 825-833, 1998.
- [39] Ritchie, R.O., Kruzic, J.J., Muhlstein, C.L., Nalla, R.K., and Stach, E.A., Characteristic dimensions and the micro-mechanisms of fracture and fatigue in 'nano' and 'bio' materials, *International Journal of Fracture*, 128(1), 1-15, 2004.
- [40] Nyman, J.S., Roy, A., Reyes, M.J., and Wang, X., Mechanical behavior of human cortical bone in cycles of advancing tensile strain for two age groups, *Journal of Biomedical Materials Research - Part A*, 89(2), 521-529, 2009.
- [41] Leng, H., Dong, X.N., and Wang, X., Progressive post-yield behavior of human cortical bone in compression for middle-aged and elderly groups, *Journal of Biomechanics*, 42(4), 491-497, 2009.
- [42] Kotha, S.P. and Guzelsu, N., Tensile damage and its effects on cortical bone, *Journal of Biomechanics*, 36(11), 1683-1689, 2003.
- [43] Yeni, Y.N., Christopherson, G.T., Turner, A.S., Les, C.M., and Fyhrie, D.P., Apparent viscoelastic anisotropy as measured from nondestructive oscillatory tests can reflect the presence of a flaw in cortical bone, *Journal of Biomedical Materials Research Part A*, 69A(1), 124-130, 2004.
- [44] Luo, Q., Leng, H., Acuna, R., Neil Dong, X., Rong, Q., and Wang, X., Constitutive relationship of tissue behavior with damage accumulation of human cortical bone, *Journal of Biomechanics*, 43(12), 2356-2361, 2010.
- [45] Abdel-Tawab, K. and Weitsman, Y.J., A strain-based formulation for the coupled viscoelastic/damage behavior, *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 68(2), 304-311, 2001.
- [46] Abdel-Tawab, K. and Weitsman, Y.J., A coupled viscoelasticity/damage model with application to swirl-mat composites, *International Journal of Damage Mechanics*, 7(4), 351-380, 1998.
- [47] Garcia, D., Zysset, P., Charlebois, M., and Curnier, A., A 1D elastic plastic damage constitutive law for bone tissue, *Archive of Applied Mechanics*, 80(5), 543-555, 2010.
- [48] Garcia, D., Zysset, P.K., Charlebois, M., and Curnier, A., A three-dimensional elastic plastic damage constitutive law for bone tissue, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 8(2), 149-165, 2009.
- [49] Bredbenner, T.L., Damage modeling of vertebral trabecular bone, Doctor of Philosophy, Case western Reserve University, 2003.

- [50] Bredbenner, T.L. and Davy, D.T., The effect of damage on the viscoelastic behavior of human vertebral trabecular bone, *Journal of Biomechanical Engineering*, 128(4), 473-480, 2006.
- [51] Bredbenner, T.L., Nicoletta, D.P., and Davy, D.T. Modeling damage in human vertebral trabecular bone under experimental loading, *Proceedings of the 2006 SEM Annual Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics 2006*, 2006.
- [52] Natali, A.N., Carniel, E.L., and Pavan, P.G., Constitutive modelling of inelastic behaviour of cortical bone, *Medical Engineering & Physics*, 30(7), 905-912, 2008.
- [53] Johnson, T.P.M., Socrate, S., and Boyce, M.C., A viscoelastic, viscoplastic model of cortical bone valid at low and high strain rates, *Acta Biomaterialia*, 6(10), 4073-4080, 2010.
- [54] Zhang, J., Michalenko, M.M., Kuhl, E., and Ovaert, T.C., Characterization of indentation response and stiffness reduction of bone using a continuum damage model, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 3(2), 189-202, 2010.
- [55] Zapas, L.J. and Crissman, J.M., Creep and recovery behaviour of ultra-high molecular weight polyethylene in the region of small uniaxial deformations, *Polymer*, 25(1), 57-62, 1984.
- [56] Tuttle, M.E., Pasricha, A., and Emery, A.F., Nonlinear viscoelastic-viscoplastic behavior of IM7/5260 composites subjected to cyclic loading, *Journal of Composite Materials*, 29(15), 2025-2046, 1995.
- [57] Guedes, R.M., Marques, A.T., and Cardon, A., Analytical and Experimental Evaluation of Nonlinear Viscoelastic-Viscoplastic Composite Laminates under Creep, Creep-Recovery, Relaxation and Ramp Loading, *Mechanics Time-Dependent Materials*, 2(2), 113-128, 1998.
- [58] Gamby, D., Lafarie-Frenot, M.C., Vinet, A., and Guedra-Degeorge, D., The prediction of the long-term mechanical behaviour of aeronautical laminates, *Composites Science and Technology*, 61(3), 439-443, 2001.
- [59] Nordin, L.-O. and Varna, J., Nonlinear viscoplastic and nonlinear viscoelastic material model for paper fiber composites in compression, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(2), 344-355, 2006.
- [60] Marklund, E., Eitzenberger, J., and Varna, J., Nonlinear viscoelastic viscoplastic material model including stiffness degradation for hemp/lignin composites, *Composites Science and Technology*, 68(9), 2156-2162, 2008.
- [61] Marklund, E., Varna, J., and Wallström, L., Nonlinear viscoelasticity and viscoplasticity of flax/polypropylene composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, *Transactions of the ASME*, 128(4), 527-536, 2006.
- [62] Dasappa, P., Lee-Sullivan, P., Xiao, X., and Foss, P.H., Tensile creep of a long-fibre glass mat thermoplastic (GMT) composite. II. viscoelastic-viscoplastic constitutive modeling, *Polymer Composites*, 30(9), 1204-1211, 2009.
- [63] Dasappa, P., Lee-Sullivan, P., and Xiao, X., Development of viscoplastic strains during creep in continuous fibre GMT composites, *Composites Part B: Engineering*, 41(1), 48-57, 2010.

- [64] Boyd, S.E., Lesko, J.J., and Case, S.W., The thermo-viscoelastic, viscoplastic characterization of Vetrotex 324/Derakane 510A-40 through Tg, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Transactions of the ASME, 128(4), 586-594, 2006.
- [65] Mui, J., Viscoelastic-Viscoplastic Model to predict Creep in a Random Chopped Mat Thermoplastic Composite, Master Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2008.
- [66] Knets, I., Peculiarities of the Structure and Mechanical Properties of Biological Tissues, *Meccanica*, 37(4), 375-384, 2002.
- [67] van Haaren, E.H., van der Zwaard, B.C., van der Veen, A.J., Heyligers, I.C., Wuisman, P.I., and Smit, T.H., Effect of long-term preservation on the mechanical properties of cortical bone in goats, *Acta orthopaedica*, 79(5), 708-716, 2008.
- [68] ABAQUS, Abaqus Documentation, 2009.
- [69] ABAQUS, Abaqus Software, Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2009.
- [70] Ouyang, F., Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy, Master of Science, University of Akron, 2005.
- [71] Ahci, E. and Talreja, R., Characterization of viscoelasticity and damage in high temperature polymer matrix composites, *Composites Science and Technology*, 66(14), 2506-2519, 2006.
- [72] Vidal-Salle, E. and Chassagne, P., Constitutive equations for orthotropic nonlinear viscoelastic behaviour using a generalized Maxwell model Application to wood material, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 11(2), 127-142, 2007.
- [73] Sorić, J., *Metoda konačnih elemenata*, Zagreb, Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.
- [74] Humphrey, J.D., Continuum biomechanics of soft biological tissues, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2029), 3-46, 2003.
- [75] Hill, P.A., Bone remodelling, *British journal of orthodontics*, 25(2), 101-107, 1998.
- [76] Miškić, B., Ovisnost ultrazvučnih parametara petne kosti u dječjoj dobi o genskim polimorfizmima, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2010.
- [77] Augustin, G., Anko, A., and Slavko, D., The periosteum Part1: Anatomy, histology and molecular biology, *Injury*, 38, 1115-1130, 2007.
- [78] Tersigni, M.A., Frozen human bone: A histological investigation, The University of Tennessee, Knoxville, 2002.
- [79] Augustin, G., Termičko oštećenje kosti tijekom operativnog zahvata, magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2004.
- [80] www.bonefromblood.org/background/boneremodelling.html.
- [81] Currey, J., *Bones: structure and mechanics*, Princeton University Press, New York, 2002.
- [82] Sharir, A., Barak, M.M., and Shahar, R., Whole bone mechanics and mechanical testing, *The Veterinary Journal*, 177(1), 8-17, 2008.

- [83] Cowin, S.C., The mechanical and stress adaptive properties of bone, *Annals of Biomedical Engineering*, 11(3-4), 263-295, 1983.
- [84] Currey, J., Incompatible mechanical properties in compact bone, *Journal of Theoretical Biology*, 231(4), 569-580, 2004.
- [85] Peterson, D.R. and Bronzino, J.D.eds. *Biomechanics Principles and Applications*, CRC Press Taylor & Francis Group, 2008.
- [86] Alfirević, I., *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Golden marketing, Zagreb, 2003.
- [87] Saadeh, S.A.-R., *Characterization of asphalt concrete using anisotropic damage viscoelastic-viscoplastic model*, Texas A&M University, 2005.
- [88] Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, New York, NY, 1992.
- [89] Kachanov, L.M., *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [90] Chaboche, J.L., Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions, in *Creep and Damage in Materials and Structures*, H. Altenbach and J.J. Skrzypek, Editors, Springer, CISM Courses, Udine, 1999.
- [91] Lemaitre, J. and Desmorat, R.eds. *Engineering Damage Mechanics (Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures)*, 2005.
- [92] Voyiadjis, G.Z. and Kattan, P.I.eds. *Damage Mechanics*, Taylor & Francis, Boca Raton, 2005.
- [93] Kattan, P.I. and Voyiadjis, G.Z.eds. *Damage Mechanics with Finite Elements: Practical Applications with Computer Tools*, Springer, 2002.
- [94] Zhang, W. and Cai, Y., *Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications*, Springer, Zhejiang University Press, 2010.
- [95] Dasappa, P., Lee-Sullivan, P., Xiao, X., and Foss, P.H., Tensile creep of a long-fiber glass mat thermoplastic composite. I. Short-term tests, *Polymer Composites*, 30(8), 1146-1157, 2009.
- [96] SAWBONES WORLDWIDE, A.D.o.P.R.L., Inc., <http://www.sawbones.com/>.
- [97] Armero, F. and Oller, S., A general framework for continuum damage models. I. Infinitesimal plastic damage models in stress space, *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50), 7409-7436, 2000.
- [98] Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z., and Skozrit, I. *Spregnuti modeli viskoelastičnosti i oštećenja za analizu koštanog tkiva*, Zbornik radova Prvog susreta Hrvatskog društva za mehaniku, Rijeka, Hrvatska, 2007.
- [99] Abdel-Tawab, K. and Weitsman, Y.J., A continuum model for viscoelasticity damage and permanent deformation with application to swirl-mat polymeric composites, in *Contract Technical Report*, Knoxville, 1996.
- [100] MATHEMATICA, *Mathematica*, Wolfram Research, Inc, Champaign, IL, USA, 2003.
- [101] Bakić, A., *Metoda kaustike u analizi kontaktnih problema kompozitnih materijala*, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.
- [102] Brinkman, J.G., *The Effect of Damage on the Long-Term Viability of Cortical Bone Allografts*, Masters of Science, Case Western Reserve University, 2010.

- [103] Sugita, N. and Mitsuishi, M., Specifications for machining the bovine cortical bone in relation to its microstructure, *Journal of Biomechanics*, 42(16), 2826-2829, 2009.
- [104] Jia, Y., Peng, K., Gong, X.L., and Zhang, Z., Creep and recovery of polypropylene/carbon nanotube composites, *International Journal of Plasticity*, 27(8), 1239-1251, 2011.
- [105] Smith, L.V. and Weitsman, Y.J., The visco-damage mechanical response of swirl-mat composites, *International Journal of Fracture*, 97(1), 301-319, 1999.
- [106] Krätzig, W.B. Multi-level modeling techniques for elasto-plastic structural responses, *Computational Plasticity*, CIMNE, Barcelona, 1997.
- [107] Sorić, J., Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2009.
- [108] Pipkin, A.C., Lectures on viscoelasticity theory, Second Edition, in *Applied Mathematical Sciences*, Springer- Verlag, New York, 1986.
- [109] Cowin, S.C. and Van Buskirk, W.C., Thermodynamic restrictions on the elastic constants of bone, *Journal of Biomechanics*, 19(1), 85-87, 1986.
- [110] Arvidsson, J. and Gronvall, J., Analysis of creep in paperboard packages with plastic tops, Master's Dissertation, Lund University, 2004.

ŽIVOTOPIS

Martina Lovrenić-Jugović rođena je 19. listopada 1974. godine u Sisku, gdje završava osnovnu i srednju školu, prirodoslovno-matematičku gimnaziju u "Gimnaziji Sisak". 1993. godine upisuje Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, na kojem diplomira u veljači 1999. godine na Konstrukcijskom smjeru s radom pod naslovom "Portalni granik 120 m" pod mentorstvom prof. dr. sc. Dragutina Ščapa.

Nakon završetka studija, u lipnju 1999. godine zapošljava se u "Željezari Sisak" kao projektant u konstrukcijskom birou. Od rujna 2001. zaposlena je na Zavodu za tehničku mehaniku pri Katedri za mehaniku i čvrstoću Fakulteta strojarstva i brodogradnje, kao znanstveni novak – asistent.

U svojstvu znanstvenog novaka sudjelovala je na projektima Ministarstva znanosti obrazovanja i športa Republike Hrvatske:

- "*Modeliranje procesa plastifikacije, zamora i loma u konstrukcijama*" br. 0120-091 i 0120-016, kojeg je voditelj prof. dr. sc. Dragan Pustaić, (od rujna 2001. do prosinca 2006. godine),
- "*Modeliranje oštećenja i sigurnost konstrukcija*" br. 120-1201910-1906, kojeg je voditelj prof. dr. sc. Zdenko Tonković. (od siječnja 2007. godine do danas).

U okviru znanstvenih projekata sudjelovala je na seminarima:

- 2004. godine "*2nd Training seminar - FITNET (Fracture, Fatigue, Creep and Corrosion)*" održanog na Sveučilištu u Mariboru, Slovenija i
- 2007. godine International Centre for Mechanical Science CISM, IUTM International Summer School, Bone Cell and Tissue Mechanics, Udine, Italija.

U svojstvu asistenta sudjelovala je u nastavi izvođenjem auditornih vježbi iz kolegija "Mehanika I", "Mehanika II", "Mehanika III", "Mehanika III-Z", "Nauka o čvrstoći I", te "Nauka o čvrstoći II". Honorarno je na Tehničkom veleučilištu držala auditorne vježbe iz kolegija "Čvrstoća".

Član je Hrvatskog društva za mehaniku. Služi se engleskim jezikom, a poznaje i osnove njemačkog. Udana je i majka dviju kćeri.

CURRICULUM VITAE

Martina Lovrenić-Jugović was born 19th of October, 1974 in Sisak, where she finished primary and secondary school, gymnasium of natural sciences and mathematics. In 1993. she enrolled in the study of mechanical engineering at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, where she graduated in February 1999. under supervision of prof. dr. sc. Dragutin Šćap.

In June 1999 she started to work in "Željezara Sisak d.d.", steel-production factory as mechanical engineer in construction bureau. Since September 2001. she is employed at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, as a Ph.D. researcher-assistant at the Chair of Mechanics and Strength of Materials at the Department of Applied Mechanics.

As Ph.D. researcher she is participated on projects of Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia:

- *"Modelling of plastification, fatigue and fracture processes in structure"* No 0120-091 i 0120-016, leaded by prof. dr. sc. Dragan Pustaić (September 2001-December 2006),
- *"Damage modeling and Safety of Structures"* No. 120-1201910-1906, leaded by prof. dr. sc. Zdenko Tonković (January 2007-).

During this science projects, she participated on following seminars:

- *"2nd Training seminar - FITNET (Fracture, Fatigue, Creep and Corrosion)"* kept 2004. on the University of Maribor, Maribor, Slovenia,
- *"International Centre for Mechanical Science CISM, IUTM International Summer School, Bone Cell and Tissue Mechanics"*, kept 2007. in Udine, Italy.

As an assistant, her teaching activities at the home faculty are "Mechanics I", "Mechanics II", "Mechanics III", "Mechanics III-Z", "Strength of Materials I", and "Strength of Materials II". Also, she has been involved in the teaching of "Strength of Materials" at the Polytechnics of Zagreb.

She is member of Croatian Society of Mechanics. Beside English as her contact language she is also familiar with basics of German language. She is married and has two daughters.